22. IX. 56 г. г. Харьков
Э. Янский

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 22

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

Болтянский Владимир Григорьевич.
Равновеликие и равносоставленные фигуры.

Редактор *А. Т. Цветков.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *С. Н. Емельянова.*

Сдано в набор 20/IV 1956 г. Подписано к печати 15/VI 1956 г. Бумага 84 × 108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 2,00. Условн. печ. л. 3,28. Уч.-изд. л. 3,40. Тираж 40 000 экз. Т-04428. Цена книги 1 р. Заказ № 1675.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности.
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый параграф предлагаемой вниманию читателя книжки посвящен доказательству следующей теоремы, найденной математиками Бояй и Гервином: *если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то один из них можно разбить на такие части, из которых возможно составить второй многоугольник*. Более краткая формулировка: если два многоугольника равновелики, то они равносоставлены. Изучению некоторых вопросов, связанных с равносоставленностью фигур, посвящена вся книжка в целом. Она разделена на две главы, в первой из которых изучаются многоугольники, а во второй — многогранники. Сформулированная выше теорема является одной из основных в первой главе.

Во второй главе наиболее интересна теорема Дена: существуют многогранники, которые имеют одинаковый объем (равновелики), но не являются равносоставленными.

Доказательству упомянутых двух теорем, ставших уже классическими, посвящена книга Вениамина Федоровича Кагана (1869—1953) «О преобразовании многогранников». Эта небольшая ярко написанная книжечка пользуется заслуженной известностью. Вместе с тем, доказательство теоремы Дена в книге В. Ф. Кагана несколько неэлементарно: оно использует понятие о непрерывности, свойства систем линейных уравнений и т. п.

В последнее время швейцарскими геометрами были получены новые результаты, углубляющие теоремы Бояй — Гервина и Дена. Существование этих новых результатов, а также тот факт, что книга В. Ф. Кагана стала уже редкостью, побудили автора написать новую книгу по этому вопросу.

Теоремы Бояй — Гервина и Дена доказаны соответственно в § 1 и § 5. Приведенные здесь доказательства значительно отличаются от имеющихся в книге В. Ф. Кагана. В частности,

доказательство теоремы Дена отличается большей элементарностью и простотой.

В §§ 2—4, 6 приведены результаты самых последних лет (они принадлежат Хадвигеру, Глюру, Сидлеру; исключение составляет теорема, приведенная в § 4, которая, повидимому, является новой).

Наиболее простыми в книжке являются три-четыре первых параграфа. Для их понимания требуются знания в объеме примерно восьми классов средней школы. Вместе с тем, эти параграфы охватывают единый круг вопросов, связанных с измерением площадей многоугольников. Изложение материала в первых трех параграфах построено на основе лекции, прочитанной автором для школьников в МГУ. Следующая по трудности часть книжки — пятый параграф и начало шестого параграфа. Они требуют знания почти всего школьного курса геометрии и умения хорошо логически мыслить. Наконец, остальная, наиболее трудная часть книжки (мелкий шрифт) рассчитана в основном на студентов пединститутов и университетов.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность И. М. Яглому за дружескую помощь при окончательной подготовке рукописи.

При работе над книгой были использованы следующие материалы:

1. В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933.
2. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, стереометрия, «Библиотека математического кружка», вып. 3, Гостехиздат, 1954.
3. H. Hadwiger, P. Glur, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone, Elemente der Mathematik 6 (1951), 97—106.
4. H. Hadwiger, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder, Archiv der Mathematik 2 (1949—1950), 441—444.
5. H. Hadwiger, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder, Mathem. Ann. 127 (1954), 170—174.
6. H. Hadwiger, Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder, Mathem. Zeits. 55 (1952), 292—298.
7. H. Hadwiger, Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale, Archiv der Mathematik 1 (1948—1949), 468—472.
8. H. Hadwiger, Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit, Mathem. Nachr. 8 (1952), 53—58.

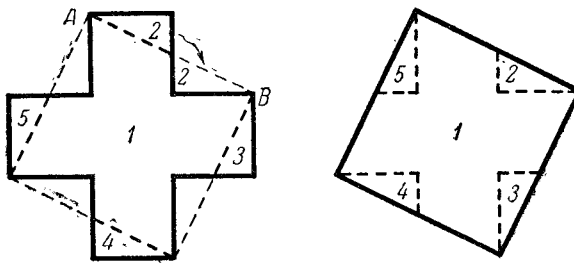
В. Болтянский

ГЛАВА I

РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Теорема Бояй — Гервина

1. Метод разложения. Рассмотрим две фигуры, изображенные на черт. 1 (все отрезки, составляющие фигуру креста, равны между собой; сторона квадрата равна отрезку AB). Пунктирные линии, проведенные на чертеже, разбивают эти фигуры на одинаковое число равных частей (равные части

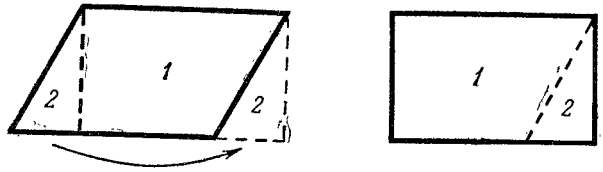


Черт. 1.

обеих фигур отмечены цифрами). Этот факт выражают следующими словами: фигуры, изображенные на черт. 1, *равносоставлены*. Иначе говоря, *две фигуры называются равносоставленными, если, определенным образом разрезав одну из них на конечное число частей, можно* (располагая эти части иначе) *составить из них вторую фигуру*.

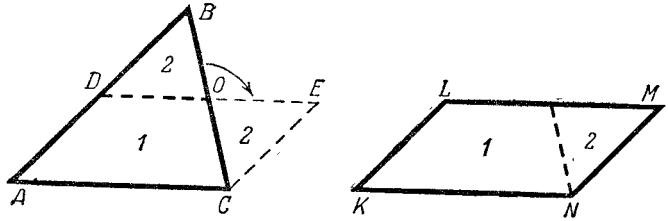
Ясно, что две равносоставленные фигуры *равновелики*, т. е. имеют одинаковую площадь. На этом основан простой способ вычисления площадей, называемый методом *разложения* (или *разбиения*). Метод этот (известный еще Евклиду,

жившему свыше 2000 лет назад) заключается в следующем: для вычисления площади пытаются разбить фигуру на конечное число частей таким образом, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру (площадь которой нам уже известна). Напомним известные из школьного-



Черт. 2.

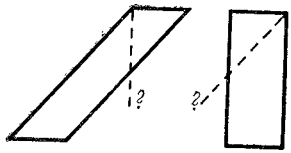
курса геометрии примеры применения этого метода. На черт. 2 дан способ вычисления площади параллелограмма: параллелограмм и прямоугольник, имеющие одинаковые основания и одну и ту же высоту, равносоставлены и потому равновелики [1]).



Черт. 3.

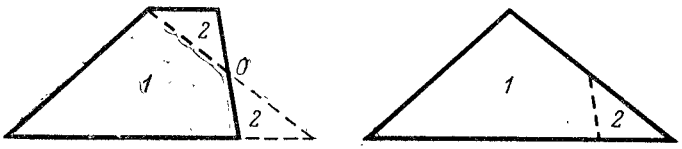
Чертеж 3 показывает, как можно вычислить площадь треугольника: треугольник имеет такую же площадь, что и

[1]) Следует отметить, однако, что такой простой прием (отщепление одного треугольника) не всегда приводит к цели. В случае, показанном на изображенном здесь чертеже, приходится разбивать парал-



лелограмм не на две, а на большее число частей, чтобы из этих частей можно было сложить прямоугольник с теми же основанием и высотой (см. ниже доказательство леммы 3).

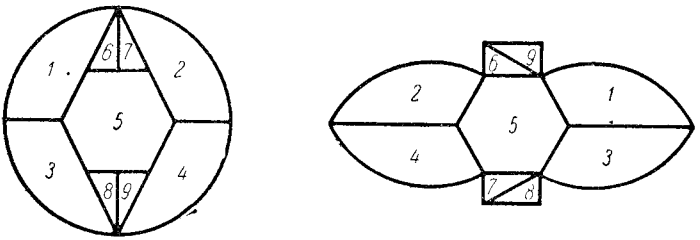
параллелограмм с тем же основанием и вдвое меньшей высотой (так как эти две фигуры равносоставлены). Наконец, на черт. 4 изображен прием вычисления площади трапеции.



Черт. 4.

Можно, конечно, рассматривать вопрос о равносоставленности и для криволинейных фигур (см., например, черт. 5); однако здесь такие фигуры рассматриваться не будут [1]). В этой главе мы будем иметь дело только с многоугольниками.

Итак, всякие два равносоставленных многоугольника равновелики. Естественно поставить обратный вопрос: всякие ли



Черт. 5.

два многоугольника, имеющих одинаковую площадь, равносоставлены? Утвердительный ответ на этот вопрос был дан (почти одновременно) венгерским математиком Фаркашем Бояй (1832 г.) и немецким офицером и любителем математики Гервином (1833 г.). К доказательству этой теоремы Бояй — Гервина мы и переходим.

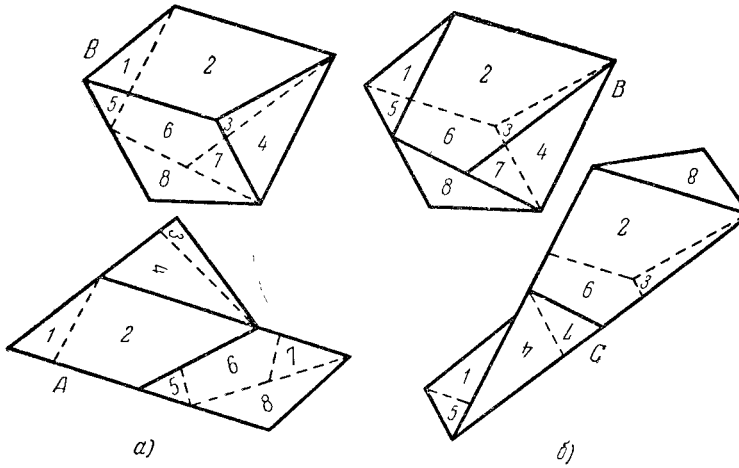
---

[1]) Вопрос об измерении площадей криволинейных фигур сводится (с помощью предельного перехода) к вопросу об измерении площадей многоугольников — достаточно вспомнить вычисление площади круга в школьном курсе геометрии. Поэтому, ограничиваясь изучением лишь многоугольников, мы тем не менее рассматриваем основные наиболее принципиальные вопросы измерения площадей. Подобно этому в главе второй изучаются лишь м н о г о г р а н н и к и; вопрос же о вычислении объемов таких тел, которые имеют криволинейные поверхности, не рассматривается.

2. Теорема Бояй — Гервина. Докажем сначала несколько вспомогательных предложений.

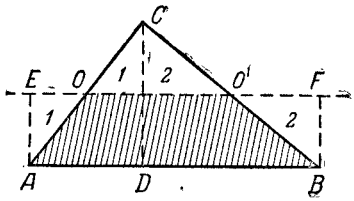
Лемма 1. *Если фигура A равносоставлена с фигурой B, а фигура B равносоставлена с фигурой C, то фигуры A и C также равносоставлены.*

Действительно, проведем на фигуре B линии, разбивающие ее на такие части, из которых можно составить фигуру A (сплошные линии на черт. 6, *а*); проведем, кроме того,



Черт. 6.

линии, разбивающие фигуру B на части, из которых можно составить фигуру C (сплошные линии на черт. 6, *б*). Те и другие линии вместе разбивают фигуру B на более мелкие части, причем ясно, что из этих более мелких частей можно составить и фигуру A, и фигуру C. Таким образом, фигуры A и C равносоставлены.

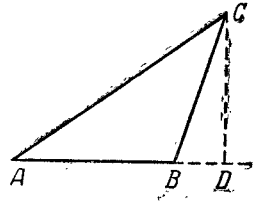


Черт. 7.

Лемма 2. *Всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

В самом деле, пусть AB — наибольшая сторона треугольника ABC (черт. 7), CD — опущенная на нее высота. Тогда точка D находится между A и B (иначе один из углов $\angle A$ или

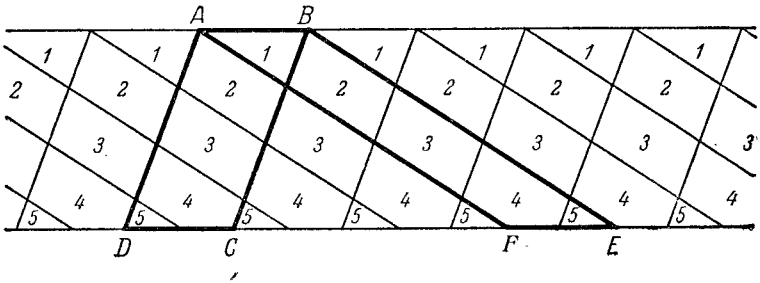
$\angle B$ был бы тупым, и сторона AB не была бы наибольшей; см. черт. 8). Через середину высоты CD проведем прямую, параллельную AB, и опустим на эту прямую перпендикуляры AE и BF. Тогда мы получим прямоугольник $AEFB$, который равносоставлен с треугольником ABC. Действительно, треугольники, помеченные на черт. 7 цифрой *1* (так же как и треугольники, помеченные цифрой *2*), равны между собой. Каждая же из фигур ABC, $AEFB$ состоит из заштрихованной на черт. 7 трапеции и двух треугольников *1*, *2*.



Черт. 8.

Лемма 3. *Два параллелограмма, имеющих общее основание и одинаковую площадь, равносоставлены.*

Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — два параллелограмма, имеющих общее основание AB и одинаковую площадь. Тогда высоты этих параллелограммов одинаковы, т. е. отрезки DC и FE расположены на одной прямой. На прямой AB отложим последовательно ряд отрезков, равных отрезку AB, и через



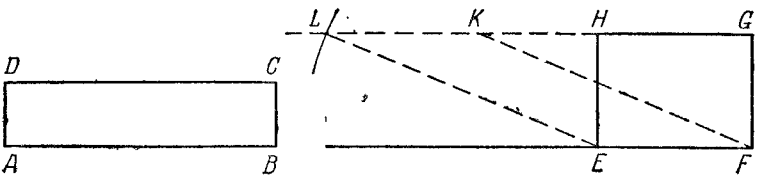
Черт. 9.

каждую точку деления проведем прямые, параллельные отрезкам AD и AF. Тогда полоса между параллельными прямыми AB и DE разобьется на ряд многоугольников (черт. 9). Каждый из этих многоугольников при сдвиге на отрезок, равный AB, совмещается с другим равным ему многоугольником. (Докажите!) Равные многоугольники на черт. 9 отмечены одинаковыми цифрами. Остается заметить, что каждый из параллелограммов $ABCD$, $ABEF$ содержит одну часть, помеченную цифрой *1*, одну часть, помеченную цифрой *2*,

цифрой *3*, и т. д. Таким образом, эти параллелограммы равносоставлены [1]).

Лемма 4. *Два прямоугольника, имеющих равную площадь, равносоставлены.*

Пусть *ABCD* и *EFGH* — два прямоугольника одинаковой площади. Из четырех отрезков *AB*, *BC*, *EF*, *FG* выберем наибольший — пусть это будет, например, отрезок *AB*. Продолжим теперь отрезок *HG* за точку *H* и на этой прямой

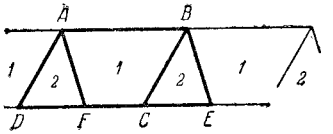


Черт. 10.

радиусом, равным *AB*, сделаем засечку из точки *E* (так как $AB \geqslant EH$, то окружность радиуса *AB* с центром в точке *E* будет с прямой *HG* иметь общую точку). Обозначая полученную точку через *L*, будем иметь $AB = EL$ и, отложив отрезок $LK = EF$, мы построим параллелограмм *EFKL* (черт. 10). Этот параллелограмм равновелик прямоугольнику *EFGH* (и прямоугольнику *ABCD*). Из леммы 3 следует, что параллелограммы *EFGH* и *EFKL*, имеющие общую сторону *EF*, равносоставлены. Но параллелограммы *ABCD* и *EFKL* также имеют одинаковую сторону $AB = EL$. Поэтому (в силу леммы 3) они равносоставлены. Наконец, так как параллелограмм *EFKL* равносоставлен с каждым из прямоугольников *ABCD* и *EFGH*, то (лемма 1) эти прямоугольники равносоставлены.

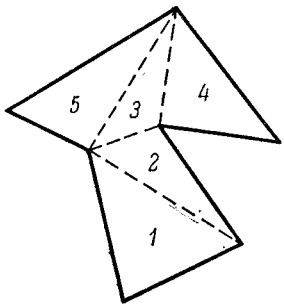
Лемма 5. *Всякий многоугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Всякий многоугольник (безразлично, выпуклый или невыпуклый) можно разбить на конечное число треугольников.

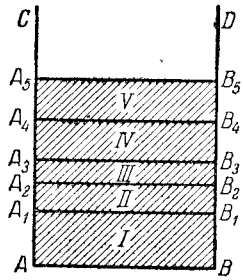


[1]) Если параллелограммы *ABCD*, *ABEF*, изображенные на черт. 9, таковы, что стороны *AF* и *BC* не пересекаются, то черт. 9 примет вид, показанный на прилагаемом чертеже, т. е. достаточно отщепить от параллелограмма *ABCD* один треугольник, чтобы из получившихся двух частей можно было составить параллелограмм *ABEF* (см. сноску на стр. 6).

Обозначим их цифрами *1, 2, 3, ...* (черт. 11). Возьмем, далее, произвольный отрезок AB и в его концах восставим перпендикуляры AC и BD (черт. 12). Проведем отрезок A_1B_1, параллельный AB, таким образом, чтобы площадь прямоугольника ABB_1A_1 была равна площади треугольника *1*. Тогда треугольник *1* и прямоугольник ABB_1A_1 (помеченный цифрой *I*) равносоставлены. Действительно, треугольник *1* равносоставлен с некоторым прямоугольником (лемма 2), который



Черт. 11.



Черт. 12.

в свою очередь равносоставлен с прямоугольником *I*, имеющим ту же площадь (лемма 4); поэтому (лемма 1) треугольник *1* и прямоугольник *I* равносоставлены. Далее, построим отрезок A_2B_2, параллельный AB, таким образом, что прямоугольник $A_1B_1B_2A_2$, помеченный цифрой *II*, равновелик треугольнику *2*. Тогда треугольник *2* и прямоугольник *II* равносоставлены. Затем мы построим прямоугольник *III*, равносоставленный с треугольником *3*, и т. д. Построенные прямоугольники *I, II, III, ...* составляют вместе один прямоугольник (заштрихованный на черт. 12), который по построению равносоставлен с исходным многоугольником.

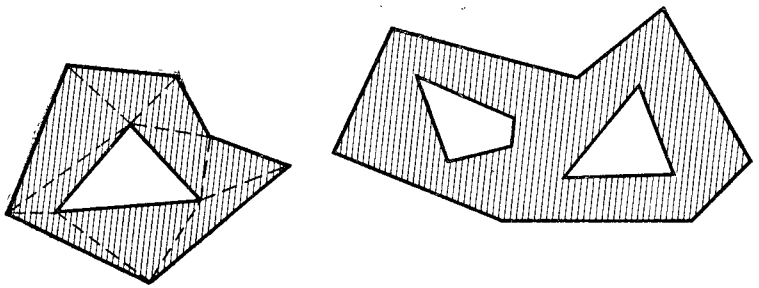
Теперь уже нетрудно доказать упомянутую на стр. 7 теорему.

Теорема Бояй—Гервина. *Два многоугольника, имеющих равные площади, равносоставлены.*

Доказательство. Согласно лемме 5 каждый из многоугольников равносоставлен с некоторым прямоугольником. Полученные два прямоугольника имеют одинаковую площадь и, следовательно, равносоставлены (лемма 4). Таким образом (лемма 1), два исходных многоугольника равносоставлены.

Замечание. Под «многоугольником» в теореме Бояй—Гервина не обязательно следует понимать часть плоскости,

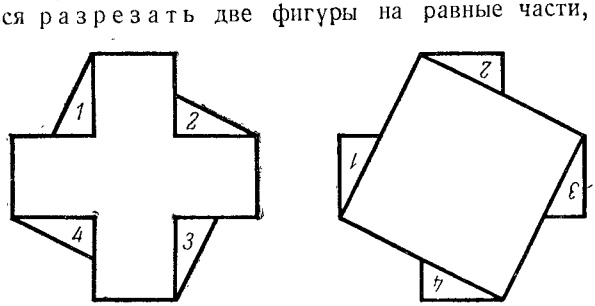
ограниченную *одной* замкнутой ломаной линией. Теорема эта остается справедливой и для более сложных фигур, ограниченных несколькими замкнутыми ломаными (такие фигуры



Черт. 13.

изображены на черт. 13). В самом деле, единственным свойством «многоугольника», которое мы использовали выше (см. доказательство леммы 5), является возможность разбить его на треугольники. Но этим свойством обладает и любая фигура, ограниченная несколькими замкнутыми ломаными (черт. 13).

3. Метод дополнения. Метод разбиения часто заменяют другим способом вычисления площадей, являющимся в некотором смысле обратным. Этот способ, называемый методом *дополнения,* мы сейчас и рассмотрим. Вместо того чтобы пытаться р а з р е з а т ь две фигуры на равные части, будем

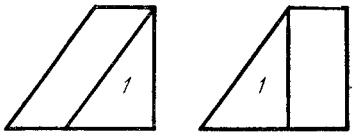


Черт. 14.

теперь д о п о л н я т ь две фигуры равными частями так, чтобы получившиеся после такого дополнения фигуры были равны. Рассмотрим снова фигуры, изображенные на черт. 1. Они имеют одинаковую площадь (в силу равносоставленности). Но равенство площадей этих фигур можно доказать и по-иному (черт. 14): добавляя и к кресту, и к квадрату по

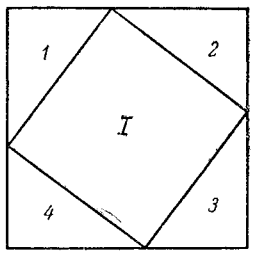
четыре равных треугольника, мы получим одну и ту же фигуру. Отсюда следует, что исходные фигуры (крест и квадрат) равновелики.

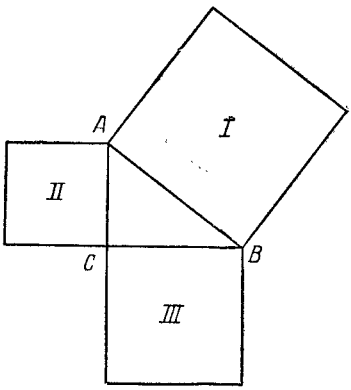
Метод дополнения можно с успехом применять для доказательства теорем элементарной геометрии. Например, для доказательства того, что параллелограмм и прямоугольник, имеющие одинаковые основания и высоты, равновелики, достаточно обратиться к черт. 15. Из этого чертежа видно, что и параллелограмм, и прямоугольник могут быть с помощью одного и того же треугольника дополнены до одной и той же трапеции. Поэтому параллелограмм и прямоугольник равновелики [1]).



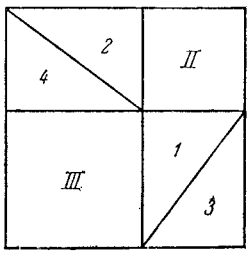
Черт. 15.

Этим же приемом легко доказать теорему Пифагора. Пусть ABC — прямоугольный треугольник. Для того чтобы доказать, что площадь квадрата I, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов II и III,





Черт. 16.

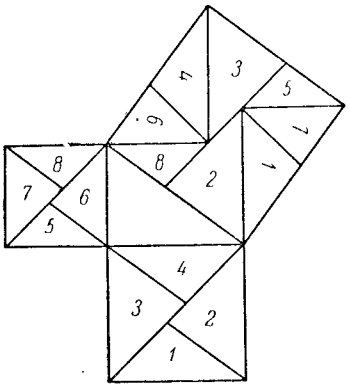


Черт. 17.

построенных на катетах (черт. 16), достаточно обратиться к черт. 17. На этом чертеже показано, что как квадрат I, так и

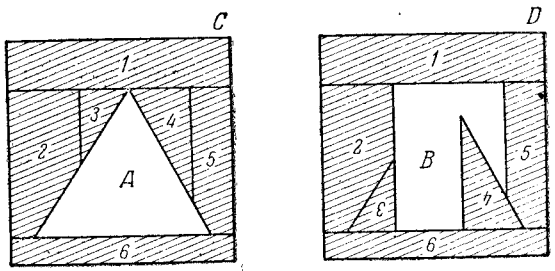
[1]) Этот способ вычисления площади параллелограмма предпочтительнее, чем обычно применяемый прием (черт. 2). Действительно, способ, изображенный на черт. 15, применим всегда в отличие от приема, изображенного на черт. 2 (см. сноску на стр. 6).

вместе взятые квадраты *II* и *III* могут быть дополнены четырьмя треугольниками, равными треугольнику *ABC*, до одной и той же фигуры, а именно, до квадрата, сторона которого равна сумме катетов. Этим теорема Пифагора доказана. Для сравнения приведем чертеж [1]) к доказательству теоремы Пифагора при помощи метода разложения (черт. 18).



Черт. 18.

Условимся называть два многоугольника *равнодополняемыми*, если, прикладывая к тому и другому одни и те же многоугольники, можно получить две одинаковые фигуры. Ясно, что равнодополняемые фигуры имеют одинаковую площадь. Естественно поставить обратный вопрос: всякие ли два многоугольника, имеющих одинаковую площадь, равнодополняемы? Утвердительный ответ на этот вопрос легко получить из теоремы Бояй — Гервина.



Черт. 19.

Теорема. *Два многоугольника, имеющих равные площади, равнодополняемы.*

Доказательство. Пусть A и B — два многоугольника, имеющих одинаковую площадь. Возьмем два одинаковых квадрата настолько больших размеров, чтобы внутри них можно

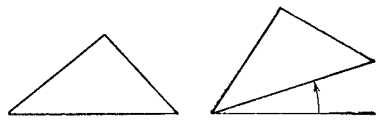
[1]) Этот чертеж заимствован из цитированной в предисловии книги Д. О. Шклярского и др. (см. стр. 188).

было расположить многоугольники A и B. Вырезав из одного квадрата многоугольник A, а из другого — многоугольник B, имеющий такую же площадь, мы получим две равновеликие фигуры C и D (заштрихованные на черт. 19). Из равенства площадей фигур C и D вытекает их равносоставленность (в силу теоремы Бояй — Гервина). Таким образом, фигуры C и D можно разрезать на попарно равные части, а это и означает равнодополняемость многоугольников A и B.

Теоремы этой главы показывают, что равносоставленность и равнодополняемость означают для плоских многоугольников в точности то же самое, что и равновеликость. Как мы увидим в главе II, в пространстве (при рассмотрении многогранников) дело обстоит совершенно иначе.

§ 2. Теорема Хадвигера — Глюра

Теорема Бояй — Гервина показывает, что понятия равновеликости и равносоставленности для многоугольников равносильны. Эта теорема открывает ряд возможностей для дальнейшего исследования. В частности, возникает интересный вопрос: нельзя ли наложить какие-то дополнительные условия на число или расположение тех частей, из которых составляются равновеликие многоугольники? Замечательный результат такого рода был получен в 1951 году швейцарскими математиками Хадвигером и Глюром. Они установили, что в теореме Бояй — Гервина можно еще дополнительно потребовать, чтобы части, на которые разрезан один из двух равновеликих многоугольников, и равные им части второго многоугольника *имели соответственно параллельные стороны*. На первый взгляд этот результат кажется неправдоподобным: трудно поверить, что два равных треугольника, повернутых друг относительно друга на произвольный угол (черт. 20), всегда можно разбить на равные части с соответственно параллельными сторонами. Тем не менее, такое разбиение существует и не только для треугольников, но и для произвольных равновеликих многоугольников. Доказательству этого факта и посвящен настоящий параграф.

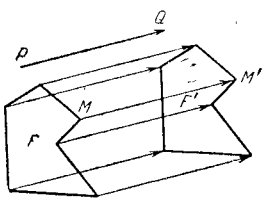


Черт. 20.

1. Движения. Обратимся снова к доказательству теоремы Бояй — Гервина, изложенному в предыдущем параграфе. При доказательстве леммы 3 (черт. 9) мы разбили параллелограмм $ABCD$ на несколько частей (помеченных цифрами *1, 2, 3, ...*), из которых оказалось возможным составить параллелограмм $ABEF$. Из черт. 9 видно, что для составления параллелограмма $ABEF$ достаточно воспользоваться *параллельными переносами частей*, т. е. достаточно сдвинуть каждую часть на некоторый отрезок, не поворачивая ее при этом [1]). В частности, равносоставленность двух параллелограммов, изображенных на черт. 2, устанавливается с помощью параллельного переноса.

Для установления равносоставленности фигур, изображенных на черт. 3 или 4, уже не достаточно одних параллельных переносов, однако легко показать равносоставленность этих фигур, пользуясь, кроме параллельных переносов, еще *центральными симметриями* [2]). Действительно, заменив (с помощью центральной симметрии относительно точки O) треугольник BOD треугольником COE (черт. 3), мы получим параллелограмм $ADEC$, который затем с помощью параллель-

[1]) Напомним определение параллельного переноса. Пусть PQ — направленный отрезок (вектор); направление его отмечено на черт. 21 стрелкой. Взяв произвольную точку M, проведем из нее отрезок MM', равный и параллельный отрезку PQ и направленный в ту же сторону; мы будем говорить, что точка M' (конец этого отрезка) получается из точки M с помощью параллельного переноса на отрезок PQ. Применив ко всем точкам некоторой фигуры F параллельный перенос на отрезок PQ, мы получим новую фигуру F', о которой также будем говорить, что она получается из F с помощью параллельного переноса на отрезок PQ. Ясно, что для обратного перехода от фигуры F' к F нужно применить параллельный перенос на отрезок QP, совпадающий с отрезком PQ, но имеющий обратное направление. Заметим, что переход от фигуры F к той же самой фигуре F также следует рассматривать как параллельный перенос (перенос на «нулевой отрезок»).



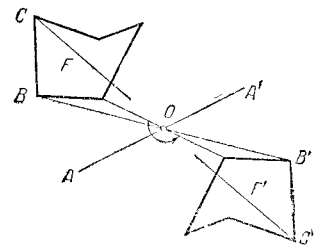
Черт. 21.

[2]) Напомним определение центральной симметрии. Пусть O — некоторая точка (центр симметрии). Если AA' — отрезок, середина которого находится в точке O, то его концы A и A' называются *симметричными* относительно центра O. Заменяя все точки некоторой фигуры F центрально симметричными им точками, мы получаем новую фигуру F'. Фигуры F и F' называются *центрально симметричными* друг другу (относительно центра O). Переход от одной из этих фигур к другой называется *центральной симметрией* (черт. 22).

ного переноса можно совместить с параллелограммом *KLMN*. Аналогично доказывается равносоставленность фигур, изображенных на черт. 4. При доказательстве леммы 2 мы также пользовались центральной симметрией (черт. 7).

Вспомним теперь доказательство леммы 4 (черт. 10). Доказательство равносоставленности прямоугольников *ABCD* и *EFGH* проводилось в два приема: сначала мы заметили, что прямоугольник *EFGH* равносоставлен с параллелограммом *EFKL*, а затем установили равносоставленность последнего с прямоугольником *ABCD*. Равносоставленность фигур *EFGH* и *EFKL* может быть установлена с помощью одних только параллельных переносов (в силу леммы 3, ибо параллелограммы *EFGH* и *EFKL* имеют общее основание). Параллелограммы же *ABCD* и *EFKL*, хотя и имеют равные стороны $AB = EL$, но расположены так, что эти стороны не параллельны, и для применения леммы 3 нужно сначала п о в е р н у т ь параллелограмм *EFKL*, сделав сторону *EL* параллельной *AB*. Таким образом, приведенное выше доказательство леммы 4 использует п о в о р о т фигуры *EFKL* (а значит, и всех частей, на которые была разбита эта фигура) на некоторый угол.

Мы видим, что в большинстве рассмотренных в первом параграфе случаев достаточно для установления равносоставленности фигур воспользоваться только центральными симметриями и параллельными переносами. Исключение составляет лемма 4, для доказательства которой пришлось применить поворот фигуры на некоторый угол. Естественно возникает вопрос: нельзя ли и при доказательстве леммы 4 обойтись без применения поворота? Можно ли, вообще, доказать равносоставленность двух любых равновеликих многоугольников, не пользуясь поворотом составных частей, т. е. применяя только центральные симметрии и параллельные переносы? Для ответа на эти вопросы нам нужно будет изучить некоторые свойства д в и ж е н и й.

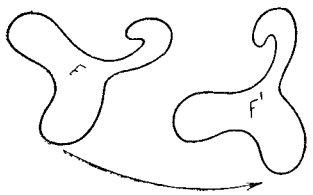


Черт. 22.

Параллельный перенос, центральная симметрия, поворот [1]) являются примерами д в и ж е н и й. Произвольное движение

[1]) Центральная симметрия является частным случаем поворота: для того чтобы заменить некоторую фигуру центрально симметричной, достаточно повернуть ее вокруг центра симметрии на 180° (черт. 22).

можно представлять себе следующим образом: некоторая фигура F «вынимается» из своей плоскости и переносится «как твердое целое» в новое положение F'; тогда переход от фигуры F к фигуре F' и называется *движением*[1]) (черт. 23). Движения мы будем обозначать малыми буквами.



Черт. 23.

Для каждого движения d имеется *обратное движение*, заключающееся в том, что каждая фигура из своего нового положения, в которое она перешла в результате движения d, переходит на прежнее место. Например, для параллельного переноса на отрезок PQ обратным движением является параллельный перенос на отрезок QP (направленный в обратную сторону). Для центральной симметрии относительно точки O обратным движением является эта же самая симметрия. Мы сформулируем эти утверждения в виде отдельной леммы.

Лемма 6. *Если движение d является параллельным переносом или центральной симметрией, то обратное ему движение также представляет собой параллельный перенос или центральную симметрию.*

Движения можно выполнять последовательно одно за другим. Например, мы можем сначала совершить параллельный перенос на некоторый отрезок (первое движение), а затем — центральную симметрию относительно некоторой точки (второе движение). Если мы сначала произведем движение d_1, а затем — движение d_2, то получим в итоге новое (результирующее) движение, которое обозначим[2]) через $d_1 \cdot d_2$; оно называется *произведением* движений d_1 и d_2.

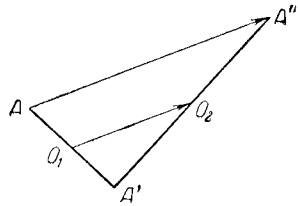
Лемма 7. *Произведение двух центральных симметрий с центрами O_1 и O_2 есть параллельный перенос на отрезок $2O_1O_2$.*

---

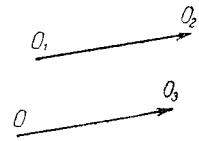
[1]) Здесь идет речь о движении одной фигуры (фигуры F). Часто бывает удобнее, говоря о движении, иметь в виду движение всей плоскости (со всеми имеющимися в этой плоскости фигурами). Например, «параллельный перенос на отрезок PQ» может быть применен к любой фигуре в плоскости, т. е. он представляет собой движение всей плоскости; «центральная симметрия относительно центра O» также есть движение всей плоскости, и т. д.

[2]) Иногда бывает удобнее обозначать результат последовательного применения движений d_1 и d_2 не через $d_1 \cdot d_2$, а через $d_2 \cdot d_1$.

В самом деле, пусть A' — точка, симметричная точке A относительно точки O_1, а A'' — точка, симметричная точке A' относительно точки O_2. Тогда O_1O_2 есть средняя линия треугольника[1]) $AA'A''$, т. е. отрезок AA'' параллелен отрезку O_1O_2, но имеет вдвое большую длину (черт. 24). Таким образом, при параллельном переносе на отрезок $PQ = 2O_1O_2$ произвольная точка A переходит в ту же самую точку A'', в которую она переходит при последовательном выполнении центральных симметрий с центрами O_1, O_2.



Черт. 24.



Черт. 25.

Лемма 8. *Произведение трех центральных симметрий с центрами O_1, O_2, O_3 есть центральная симметрия.*

Действительно, пусть O — такая точка, что отрезки O_1O_2 и OO_3 равны, параллельны и одинаково направлены (черт. 25). Тогда произведение симметрий с центрами O_1, O_2 совпадает с произведением симметрий, имеющих центры O, O_3 (ибо и то, и другое произведения представляют собой в силу леммы 7 параллельный перенос на отрезок $2O_1O_2 = 2OO_3$). Таким образом, вместо трех симметрий с центрами O_1, O_2, O_3 мы можем перемножить симметрии с центрами O, O_3, O_3, что дает, очевидно, одну симметрию относительно центра O (ибо в результате последовательного выполнения двух симметрий относительно одного и того же центра O_3 каждая точка попадает на прежнее место).

Лемма 9. *Если каждое из двух движений d_1, d_2 является параллельным переносом или центральной симметрией, то их произведение $d_1 \cdot d_2$ представляет собой параллельный перенос или центральную симметрию.*

Действительно, так как параллельный перенос сводится к двум центральным симметриям (это легко следует из леммы 7), то два указанных в лемме движения сводятся к двум, трем

[1]) Если точка A лежит на прямой O_1O_2, то точки A, A', A'' лежат на одной прямой, т. е. не образуют треугольника. Однако рассуждения остаются верными и в этом случае.

или четырем симметриям. Но две симметрии дают параллельный перенос (лемма 7), три симметрии сводятся к одной (лемма 8), а четыре симметрии сначала можно свести к двум (ибо три — к одной), а затем заменить эти две симметрии параллельным переносом. Во всех случаях произведение оказывается либо центральной симметрией, либо переносом.

2. Теорема Хадвигера — Глюра. Будем говорить, что два многоугольника *S-равносоставлены* [1]), если их равносоставленность можно установить с помощью одних только *параллельных переносов и центральных симметрий*. Иначе говоря, многоугольники S-равносоставлены, если один из них можно разбить на конечное число частей M_1, M_2, M_3, ..., а другой — на такое же число соответственно равных частей M_1', M_2', M_3', ..., причем многоугольники M_1 и M_1' получаются друг из друга с помощью параллельного переноса или центральной симметрии; то же справедливо для M_2 и M_2', для M_3 и M_3' и т. д.

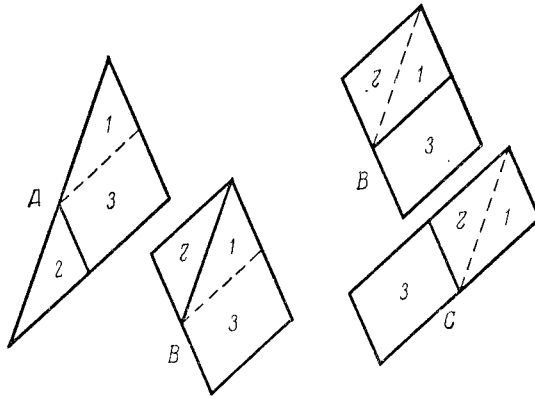
Мы переходим к доказательству теоремы о том, что *два равновеликих многоугольника всегда являются S-равносоставленными*. Доказательство ее вполне аналогично доказательству теоремы Бояй — Гервина и опирается на похожие леммы.

Лемма 1а. *Если A и C — два многоугольника, каждый из которых S-равносоставлен с многоугольником B, то A и C также S-равносоставлены.*

Действительно, проведем на фигуре B линии, разбивающие ее на такие многоугольники, из которых можно (с помощью переносов и симметрий) составить фигуру A; проведем, кроме того, линии, разбивающие фигуру B на многоугольники, из которых можно (с помощью переносов и симметрий) составить фигуру C (черт. 26). Те и другие линии вместе разбивают фигуру B на более мелкие части, причем ясно, что из этих более мелких частей можно (с помощью переносов и симметрий) составить и фигуру A, и фигуру C. Таким образом, фигуры A и C окажутся некоторым образом разбитыми на части. Обозначим части, из которых состоит фигура B, через M_1', M_2', M_3', ...; соответствующие части фигуры A обозначим через M_1, M_2, M_3, ..., а соответствующие части фигуры C — через M_1'', M_2'', M_3'', ... Каждый из многоугольников M_i и M_i'' получается из M_i' с помощью параллельного переноса или центральной симметрии. Отсюда следует (лемма 6),

[1]) Смысл этого термина глубже раскрывается в § 4.

что M_1' получается из M_1 с помощью параллельного переноса или центральной симметрии, а потому (лемма 9) многоугольник M_1'' получается из M_1 с помощью параллельного переноса или центральной симметрии. Аналогично, многоугольник M_2'' получается из M_2 с помощью переноса или симметрии; то же верно для M_3 и M_3'', и т. д. Таким образом, фигуры A и C являются S-равносоставленными.



Черт. 26.

Заметим, что только здесь используются рассмотренные выше свойства симметрий и переносов (леммы 6 и 9).

Лемма 2а. *Всякий треугольник S-равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

См. доказательство леммы 2 §1 (стр. 8). Треугольники, помеченные на черт. 7 цифрой *1*, получаются друг из друга с помощью симметрии относительно центра O, а треугольники, помеченные цифрой *2*,— с помощью симметрии относительно центра O'. Наконец, заштрихованная на черт. 7 трапеция остается на месте, т. е. к ней применяется параллельный перенос на «нулевой отрезок». Итак, фигуры ABC и $ABFE$, изображенные на черт. 7, являются S-равносоставленными.

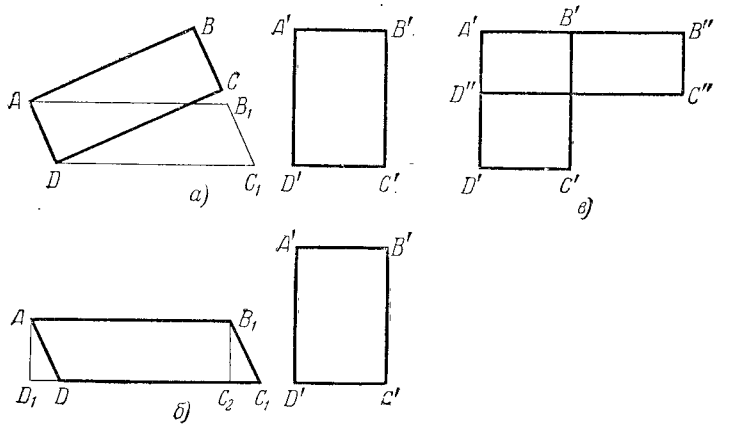
Лемма 3а. *Два равновеликих параллелограмма, основания которых равны и параллельны, S-равносоставлены.*

Действительно, с помощью параллельного переноса можно совместить равные основания параллелограммов, после чего останется повторить доказательство леммы 3 §1 (стр. 9): части, помеченные на черт. 9 одинаковыми цифрами, получаются друг из друга с помощью параллельных переносов.

Лемма 4а. *Два прямоугольника, имеющих равную площадь, S-равносоставлены.*

Доказательство леммы 4 § 1 здесь непригодно, так как в нем применяется поворот (см. стр. 17). Поэтому мы рассмотрим новое доказательство.

Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — два равновеликих прямоугольника. Построим параллелограмм AB_1C_1D, равновеликий обоим прямоугольникам, который имеет с прямоугольником $ABCD$ общую сторону AD и имеет сторону AB_1, параллельную одной из сторон прямоугольника $A'B'C'D'$ (черт. 27, *а*). Тогда



Черт. 27.

параллелограммы $ABCD$ и AB_1C_1D являются S-равносоставленными (лемма 3а). Далее, построим прямоугольник $AB_1C_2D_1$, равновеликий первоначальным прямоугольникам и имеющий с параллелограммом AB_1C_1D общую сторону AB_1. Тогда фигуры AB_1C_1D и $AB_1C_2D_1$ являются S-равносоставленными (черт. 27, *б*). При этом стороны прямоугольников $AB_1C_2D_1$ и $A'B'C'D'$ соответственно параллельны. Наконец, с помощью параллельного переноса наложим прямоугольник $AB_1C_2D_1$ на $A'B'C'D'$ так, чтобы точка A совпала с A', а сторона AD_1 пошла по $A'D'$. Мы получим прямоугольник $A'B''C''D''$, имеющий с прямоугольником $A'B'C'D'$ общий угол A' (черт. 27, *в*). Так как в этом построении мы каждый раз переходили от одного параллелограмма к другому, S-равносоставленному с первым, то в силу леммы 1а мы получаем прямоугольник $A'B''C''D''$, S-равносоставленный с первоначальным прямоуголь-

ником $ABCD$. Остается доказать S-равносоставленность полученного прямоугольника $A'B''C''D''$ с прямоугольником $A'B'C'D'$. Будем при этом для определенности считать, что $A'B'' > A'B'$ (и потому $A'D'' < A'D'$). Проведем отрезки $B''D'$, $B'D''$, $C'C''$ и покажем, что они параллельны между собой (черт. 28). Действительно, из равенства площадей мы получаем:

$$A'B' \cdot A'D' = A'B'' \cdot A'D'', \tag{1}$$

откуда, вычитая из обеих частей равенства произведение $A'D'' \cdot A'B'$, имеем:

$$A'B' \cdot D'D'' = A'D'' \cdot B'B''$$

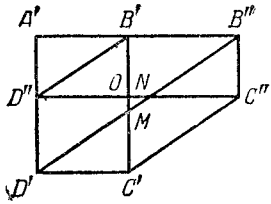
или

$$A'B' \cdot OC' = A'D'' \cdot OC''. \tag{2}$$

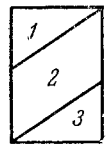
Записав равенства (1) и (2) в виде пропорций, получаем:

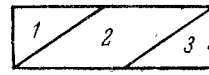
$$A'B' : A'D'' = A'B'' : A'D' = OC'' : OC'.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники $A'B'D''$, $A'B''D'$, $OC'C''$ подобны. Отсюда следует, что $\angle A'D''B' = \angle A'D'B'' = \angle B'C'C''$, и потому отрезки $B''D'$, $B'D''$, $C'C''$ параллельны между собой.



Черт. 28.





Черт. 29.

Обозначим точки пересечения отрезка $B''D'$ с отрезками $B'C'$ и $C''D''$ через M и N. Тогда $\triangle B''C''N = \triangle MC'D'$ ($B''C'' = MC'$ и $C''N = C'D'$, так как $B''C''C'M$ и $NC''C'D'$ — параллелограммы). Далее, параллелограммы $B'B''ND''$ и $B'MD'D''$ равновелики и имеют общее основание $B'D''$, так что в силу леммы 3а они S-равносоставлены. Наконец, треугольник $A'B'D''$ принадлежит обоим прямоугольникам $A'B'C'D'$ и $A'B''C''D''$. Итак, из полученного разбиения каждого из этих прямоугольников на три части (черт. 29) мы заключаем, что они S-равносоставлены (части, помеченные цифрами *1* и *3*, соответственно равны и получаются друг из друга с помощью параллельного переноса, а параллелограммы, помеченные цифрой *2*, S-равносоставлены).

Лемма 5а. *Всякий многоугольник S-равносоставлен с некоторым прямоугольником.*

Теорема Хадвигера — Глюра. *Два многоугольника, имеющих равные площади, S-равносоставлены.*

Доказательства леммы 5а и теоремы Хадвигера — Глюра получаются дословным повторением доказательств леммы 5 и теоремы Бояй — Гервина с той только разницей, что вместо «равносоставлены» следует говорить «S-равносоставлены», а вместо ссылок на леммы 1, 2, ... следует иметь в виду ссылки на леммы 1а, 2а, ...

Из доказанной теоремы Хадвигера—Глюра непосредственно вытекает, что равновеликие многоугольники можно разбить на части с соответственно параллельными сторонами (см. начало этого параграфа). В самом деле, если A и B — равновеликие многоугольники, то один из них можно разбить на такие части, из которых, пользуясь только параллельными переносами и центральными симметриями, можно составить второй многоугольник. Остается заметить, что если два многоугольника получаются друг из друга с помощью параллельного переноса (черт. 21) или центральной симметрии (черт. 22), то их стороны соответственно параллельны.

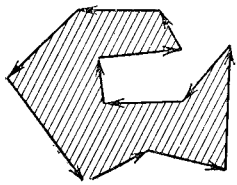
§ 3. Равносоставленность и понятие аддитивного инварианта

После доказательства теоремы Хадвигера — Глюра естественно возникает вопрос: нельзя ли разбить любые два равновеликих многоугольника на части, получающиеся друг из друга с помощью одних параллельных переносов? Иначе говоря, не является ли излишним применение симметрий в предыдущем параграфе? Рассмотрению этого вопроса и посвящен настоящий параграф. Мы увидим, что не всякие два многоугольника одинаковой площади можно разбить на части, получающиеся друг из друга с помощью параллельных переносов; в частности, треугольник и равновеликий ему параллелограмм не допускают такого разбиения на части.

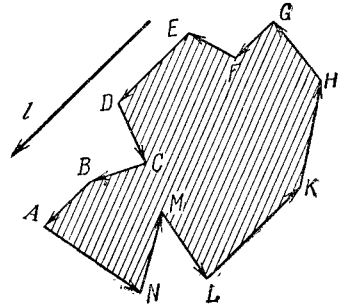
Для установления этих фактов будет применяться определяемое ниже понятие аддитивного инварианта. Это понятие найдет свое применение и в последующих параграфах.

1. Аддитивный инвариант $J_l(M)$. Пусть M — произвольный многоугольник. На каждой его стороне отметим стрелкой такое направление, что, идя по этой стороне в указанном

направлении, мы будем вблизи этой стороны слева видеть точки, принадлежащие рассматриваемому многоугольнику, а справа — точки, не принадлежащие ему [1]) (черт. 30). Выберем, далее, некоторую *направленную прямую* l, т. е. прямую, на которой стрелкой отмечено направление. Обозначим через $J_l(M)$ алгебраическую сумму длин всех сторон многоугольника M, параллельных прямой l, причем те стороны, которые одинаково направлены с прямой l (стороны AB, DE и FG на черт. 31), возьмем со знаком $+$, а те стороны, которые имеют противоположное направление (сторона KL на черт. 31), возьмем со знаком $-$. Если же сто-



Черт. 30.



Черт. 31.

рон, параллельных прямой l, у многоугольника M не оказалось, то число $J_l(M)$ считается равным нулю. Число $J_l(M)$ будем называть *аддитивным инвариантом* (причина такого названия выясняется ниже).

Важность инварианта $J_l(M)$ для вопроса о равносоставленности многоугольников становится ясной из теоремы, к формулировке которой мы переходим.

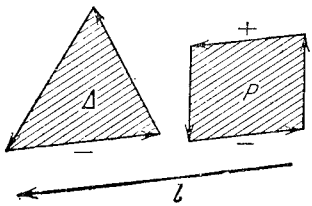
2. *T*-равносоставленность. Будем называть два многоугольника *T-равносоставленными*, если их равносоставленность может быть установлена с помощью *одних только параллельных переносов* (ср. стр. 20).

Теорема. *Пусть A и A' — два многоугольника, а l — направленная прямая. Если $J_l(A) \neq J_l(A')$, то многоугольники A и A' не являются T-равносоставленными.*

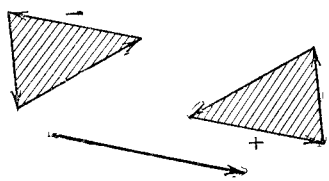
---

[1]) Если мы будем одну за другой проходить стороны многоугольника, двигаясь в указанных стрелками направлениях, то мы обойдем весь контур многоугольника и вернемся в исходную точку. В этом случае говорят, что мы совершили *обход* контура многоугольника *против часовой стрелки.*

Доказательство этой теоремы мы рассмотрим ниже, а сейчас отметим одно простое следствие, вытекающее из нее. Пусть Δ — треугольник, а P — равновеликий ему параллелограмм (основание параллелограмма параллельно основанию треугольника, черт. 32). Выберем прямую l параллельной основаниям треугольника и параллелограмма и определим знаки сторон согласно указанному выше правилу (черт. 32).



Черт. 32.



Черт. 33.

Тогда мы найдем: $J_l(P) = 0$, $J_l(\Delta) \neq 0$, так что $J_l(P) \neq J_l(\Delta)$, и потому фигуры P и Δ не являются T-равносоставленными. Не являются T-равносоставленными также равные треугольники, изображенные на черт. 33.

Переходим к доказательству сформулированной здесь теоремы.

3. Свойства инварианта $J_l(M)$.

Лемма 10. *Пусть l — направленная прямая, а M и M' — два многоугольника, получающихся друг из друга с помощью параллельного переноса. Тогда $J_l(M) = J_l(M')$.*

Иначе говоря, число J_l не изменяется при параллельном переносе; отсюда — название *инвариант*, что означает *неизменный*.

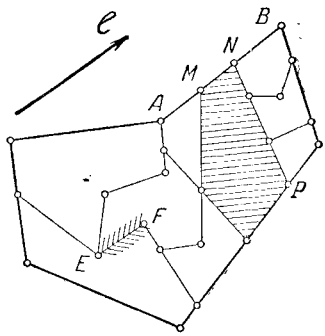
Утверждение этой леммы очевидно (при параллельном переносе многоугольника длины его сторон и их направления не меняются).

Лемма 11. *Пусть l — направленная прямая, а A — некоторый многоугольник, разбитый на конечное число многоугольников M_1, M_2, ..., M_k. Тогда*

$$J_l(A) = J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k). \qquad (3)$$

Иначе говоря, если многоугольник A составляется из нескольких меньших многоугольников, то его инвариант получается из инвариантов этих составляющих многоугольников при помощи сложения; отсюда — название *аддитивный* инвариант (от слова addition — сложение).

Доказательство. Рассмотрим все отрезки, являющиеся сторонами многоугольников A, M_1, M_2, ..., M_k. Отметим на этих отрезках все точки, являющиеся вершинами многоугольников A, M_1, M_2, ..., M_k. Тогда мы получим конечное число более мелких отрезков, которые будем называть *звеньями*. Каждая сторона каждого из многоугольников A, M_1, M_2, ..., M_k состоит из одного или нескольких звеньев. На черт. 34 изображено разбиение многоугольника на более мелкие части. Сторона AB состоит из трех звеньев AM, MN, NB; из трех звеньев состоит также сторона NP заштрихованного на чертеже многоугольника.



Черт. 34.

Заметим, что для вычисления инварианта J_l (A) многоугольника A (или любого из многоугольников M_1, M_2, ..., M_k) можно взять алгебраическую сумму не сторон, а звеньев, параллельных прямой l, так как длина каждой стороны равна сумме длин составляющих ее звеньев. Поэтому для вычисления суммы, стоящей в правой части соотношения (3), нужно составить алгебраическую сумму длин всех звеньев, параллельных прямой l, причем эти звенья нужно учитывать по всем многоугольникам M_1, M_2, ..., M_k.

Рассмотрим некоторое звено, которое целиком (кроме, может быть, концов) расположено внутри многоугольника A (звено EF на черт. 34). Тогда к нему примыкают два многоугольника из числа многоугольников M_1, M_2, ..., M_k, причем они примыкают к рассматриваемому звену с разных сторон (один — справа, другой — слева). Поэтому при вычислении инварианта одного многоугольника рассматриваемое звено войдет с одним знаком, а при вычислении инварианта другого многоугольника — с противоположным знаком, и в общей алгебраической сумме звеньев эти два члена взаимно уничтожатся. Мы видим, что при вычислении правой части соотношения (3) можно совсем не учитывать звеньев, расположенных внутри многоугольника A.

Рассмотрим теперь некоторое звено, расположенное на контуре многоугольника A и параллельное прямой l (звено AM на черт. 34). К нему примыкает только один из много-

угольников $M_1, M_2, \ldots, M_k$, причем с той же стороны, с какой примыкает к рассматриваемому звену многоугольник A. Следовательно, это звено войдет в сумму $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k)$ с тем же знаком, что и в инвариант $J_l(A)$.

Итак, правая часть соотношения (3) равна $J_l(A)$, т. е. формула (3) справедлива.

Теперь уже нетрудно доказать теорему, сформулированную на стр. 25. Действительно, пусть $J_l(A) \neq J_l(A')$, и при этом (вопреки утверждению теоремы) многоугольники A и A' являются T-равносоставленными. Это означает, что A можно составить из таких многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а B — из таких многоугольников $M_1', M_2', \ldots, M_k'$, что M_1 и M_1' получаются друг из друга с помощью параллельного переноса; то же справедливо для M_2 и M_2', и т. д. Тогда согласно лемме 10 мы получаем:

$$J_l(M_1) = J_l(M_1'),\ J_l(M_2) = J_l(M_2'),\ \ldots,\ J_l(M_k) = J_l(M_k'), \quad (4)$$

а согласно лемме 11

$$\left.\begin{aligned} J_l(A) &= J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k), \\ J_l(A') &= J_l(M_1') + J_l(M_2') + \ldots + J_l(M_k'). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует $J_l(A) = J_l(A')$, что противоречит условию. Таким образом, при выполнении неравенства $J_l(A) \neq J_l(A')$ многоугольники A и A' не могут быть T-равносоставленными.

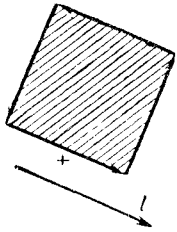
4. Центрально симметричные многоугольники. Теорему, доказательство которой было выше изложено, можно сформулировать еще следующим образом: два многоугольника A и A' только в том случае могут быть T-равносоставленными, если для любой прямой l имеет место равенство $J_l(A) = J_l(A')$. Иначе говоря, для T-равносоставленности многоугольников A и A' необходимо выполнение равенств $J_l(A) = J_l(A')$. Можно доказать, что это условие является также и достаточным, т. е. что имеет место следующее предложение [1]).

Теорема. *Если равновеликие многоугольники A и A' таковы, что для любой направленной прямой l имеет место равенство $J_l(A) = J_l(A')$, то многоугольники A и A' являются T-равносоставленными.*

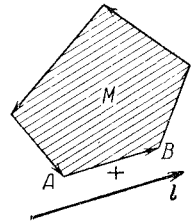
---

[1]) Доказательство имеется в совместной работе Хадвигера и Глюра, указанной в предисловии.

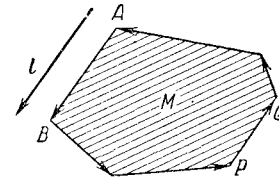
Поставим теперь следующую задачу: найти все выпуклые многоугольники, T-равносоставленные с квадратом. Легко видеть, что для квадрата Q инвариант $J_l(Q)$ равен нулю, какова бы ни была прямая l (случай, когда прямая l параллельна одной из сторон квадрата, изображен на черт. 35; если же прямая l не параллельна ни одной стороне квадрата, то $J_l(Q)=0$ в силу определения числа $J_l(Q)$). Поэтому наша задача может быть сформулирована следующим образом: найти



Черт. 35.



Черт. 36.



Черт. 37.

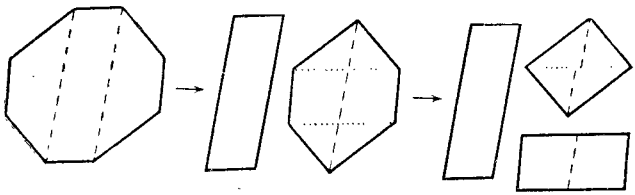
все выпуклые многоугольники, у которых инвариант J_l равен нулю для любой прямой l. Пусть M — многоугольник, обладающий этим свойством, AB — одна из его сторон, а l — прямая, параллельная AB. Тогда многоугольник M должен иметь еще сторону, параллельную AB (так как иначе было бы $J_l(M)=AB>0$, см. черт. 36). Если эту параллельную прямой AB сторону [1]) обозначим через PQ, то будем иметь (черт. 37) $J_l(M)=AB-PQ$, а так как число $J_l(M)$ должно быть равно нулю, то $AB=PQ$. Итак, для каждой стороны многоугольника M имеется равная и параллельная ей («противоположная») сторона, откуда легко следует, что многоугольник M центрально симметричен. Ясно также, что и обратно: если многоугольник M центрально симметричен, то для любой прямой l инвариант $J_l(M)$ равен нулю. Таким образом, *для T-равносоставленности выпуклого многоугольника с квадратом необходимо и достаточно, чтобы этот многоугольник был центрально симметричен.*

Мы получили этот результат, опираясь на сформулированную (и не доказанную) на предыдущей странице теорему.

---

[1]) Так как многоугольник M — выпуклый, то он не может иметь больше двух сторон, параллельных прямой l.

Однако, руководствуясь черт. 38, читатель легко докажет (без использования этой теоремы), что центрально симметричный многоугольник можно (разбив на части и применяя па-



Черт. 38.

раллельные переносы) превратить в несколько параллелограммов, а затем (см. доказательство леммы 3) — в квадрат.

§ 4. Равносоставленность и понятие группы

В § 2 мы говорили о движениях плоскости. Обозначим через D все множество движений; каждое отдельное движение будем называть *элементом* этого *множества* D. Например, каждый параллельный перенос (или каждая центральная симметрия) является элементом множества D. Для каждых двух движений определено их произведение, т. е. множество D обладает следующим свойством.

Свойство 1. *Для каждых двух элементов* d_1, d_2 *множества* D *определено их произведение* $d_1 \cdot d_2$, *которое также является элементом этого же множества* D.

Среди движений есть одно, играющее особую роль. Это — движение, оставляющее все фигуры на своем месте, движение, заключающееся, если можно так выразиться, в «отсутствии всякого движения». Мы будем обозначать это движение буквой e и называть *тождественным движением*. Оно обладает тем свойством, что для *любого* движения d произведения $d \cdot e$ и $e \cdot d$ совпадают с d:

$$d \cdot e = e \cdot d = d.$$

В самом деле, если мы сначала применим e (оставим все фигуры на месте), а потом применим d, то это как раз и означает, что мы выполнили движение d, т. е. $e \cdot d = d$. Точно так же ясно, что $d \cdot e = d$. Это напоминает нам свойства числа 1 при умножении ($a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого числа a). Поэтому движение e называют также *единицей*. Итак,

Свойство 2. *В множестве D имеется такой элемент e, называемый единицей, что для любого элемента d из D выполнены соотношения*

$$d \cdot e = e \cdot d = d. \tag{6}$$

Далее, для каждого движения d существует обратное движение, которое обозначается через d^{-1}. Произведение движения d и обратного ему движения d^{-1} (так же как произведение движения d^{-1} и движения d) есть движение, оставляющее все фигуры на прежнем месте, т. е.

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e.$$

Таким образом, получаем

Свойство 3. *Для каждого элемента d множества D имеется принадлежащий этому же множеству элемент* d^{-1}, *называемый обратным для элемента d, для которого выполнены соотношения*

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e. \tag{7}$$

Пусть теперь d_1, d_2 и d_3 — три движения. Предположим, что некоторая фигура A переводится движением d_1 в фигуру B, фигура B переводится движением d_2 в фигуру C, а фигура C переводится движением d_3 в фигуру D. Рассмотрим произведение $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$, заключающееся в том, что движения d_1 и d_2 перемножаются между собой и полученное произведение умножается на d_3. Движение $d_1 \cdot d_2$ переводит, как легко видеть, фигуру A в C, а движение d_3 переводит фигуру C в D. Поэтому движение $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ фигуру A переводит сразу в D. Если мы выполним умножение в другом порядке: $d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3)$, то найдем, что фигура A переводится движением d_1 в фигуру B, которая движением $d_2 \cdot d_3$ также переводится в D. Итак, оба движения $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ и $d_1 (d_2 \cdot d_3)$ переводят каждую фигуру A в одну и ту же фигуру, т. е. эти движения просто совпадают.

Таким образом, имеет место

Свойство 4. *Для любых трех элементов* d_1, d_2, d_3 *множества D выполнено соотношение*

$$(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3 = d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3), \tag{8}$$

называемое условием ассоциативности.

Итак, множество D всех движений обладает перечисленными свойствами 1—4.

Всякое множество, состоящее из каких угодно элементов и обладающее свойствами 1—4, *называется группой* [1]).

Как мы видели, множество D *всех движений* плоскости является группой. Рассмотрим теперь множество S, *состоящее из всех параллельных переносов и центральных симметрий,* и покажем, что оно также является группой. В самом деле, элементы множества S являются движениями; для каждых двух из них (как и для двух произвольных движений) определено произведение, причем согласно лемме 9 оно также является элементом множества S. Таким образом, свойство 1 выполнено. Свойство 2 также, очевидно, выполнено, так как движение e является переносом (т. е. принадлежит множеству S), а соотношение (6) имеет место вообще для всех движений (и, в частности, для переносов и симметрий, т. е. для элементов множества S). Свойство 3 выполнено потому, что для переносов и симметрий обратными движениями снова являются переносы и симметрии (лемма 6), а соотношение (7), справедливое для всех движений, выполнено, в частности, для элементов множества S. Наконец, условие ассоциативности (8), имеющее место для всех движений, также справедливо для переносов и симметрий. Таким образом, множество S есть группа.

Совершенно так же можно показать, что множество T, состоящее из всех параллельных переносов, есть группа.

Некоторое множество G называется *группой движений,* если элементами его являются движения (так что ясно, в каком смысле эти элементы можно перемножать) и выполнены свойства 1—4 (т. е. G есть группа). Примерами групп дви-

---

[1]) Мы будем рассматривать здесь только группы движений (см. ниже). В качестве примера группы, элементы которой не являются движениями, можно указать множество G всех положительных чисел (единицей является число 1; произведение имеет обычный смысл; обратным для числа a является число $\frac{1}{a} = a^{-1}$). Можно было бы привести еще целый ряд примеров групп.

Понятие группы играет огромную роль в современной математике. Интересующимся можно порекомендовать книгу П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Учпедгиз, Москва, 1953), которая написана вполне элементарно и содержит большое число чрезвычайно интересных примеров. О применении понятия группы в геометрии см. вторую часть книги И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (Гостехиздат, 1956). Заметим, что в книгах П. С. Александрова и И. М. Яглома операция в группе названа не умножением, а *сложением.*

жений могут служить рассмотренные выше группы D, S, T. В качестве нового примера группы движений можно указать группу O_n, состоящую из поворотов вокруг одной и той же точки на один из углов $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-2)\pi}{n}$ (поворот на угол 0 есть тождественное движение e). Предоставим читателю убедиться в том, что O_n есть группа. Заметим только, что, как показывает этот пример, группа может состоять из конечного числа элементов (в группе O_n имеется n элементов).

Пусть G — некоторая группа движений, а A и A' — два многоугольника. Предположим, что многоугольник A нам удалось разбить на такие части $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а многоугольник A' — на такие части $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$, которые получаются друг из друга с помощью движений, принадлежащих группе G (т. е. в группе G имеется такое движение g_1, которое переводит многоугольник M_1 в M'_1, имеется движение g_2, переводящее M_2 в M'_2, и т. д.). В этом случае многоугольники A и A' называются *G-равносоставленными*. Если в качестве группы G рассматриваются группы S или T, то мы получаем понятия S-равносоставленности или T-равносоставленности, рассмотренные выше. Всякие два многоугольника одинаковой площади D-равносоставлены (теорема Бояй — Гервина) и даже S-равносоставлены (теорема Хадвигера—Глюра), однако существуют многоугольники (например, треугольник и параллелограмм), имеющие одинаковую площадь, но не являющиеся T-равносоставленными.

Отметим в заключение следующую теорему, отвечающую на вопрос, который, возможно, возник у читателя.

Теорема. *Группа S является наименьшей группой движений, позволяющей установить равносоставленность любых равновеликих многоугольников. Иначе говоря, если G есть такая группа движений, что любые два равновеликих многоугольника G-равносоставлены, то группа G содержит всю группу S (т. е. содержит все параллельные переносы и все центральные симметрии).*

Доказательство опирается на несколько лемм; при формулировке этих лемм мы будем предполагать, что G есть группа, удовлетворяющая условиям теоремы.

Лемма 12. *Если P и Q — две произвольные точки плоскости, то в группе G существует движение, переводящее P в Q* (это свойство группы движений называется *транзитивностью*).

Допустим противное: существуют такие две точки P, Q, что ни одно движение, принадлежащее группе G, не переводит точку P в Q.

Те точки, в которые точка P может быть переведена движениями, принадлежащими группе G, назовем *отмеченными*. Если M — некоторый многоугольник, то сумму тех его углов, вершины которых являются отмеченными точками, обозначим через $I_P(M)$. Если многоугольники M и M' получаются друг из друга с помощью некоторого движения, принадлежащего группе G, то $I_P(M) = I_P(M')$. Далее, если многоугольник A разбит на несколько более мелких многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_k$, то имеет место равенство

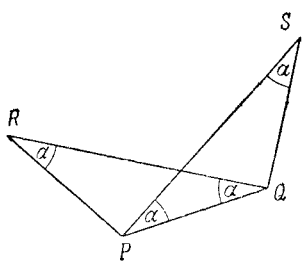
$$I_P(A) = I_P(M_1) + I_P(M_2) + \ldots + I_P(M_k) + n\pi,$$

где n — некоторое целое число (это доказывается непосредственным подсчетом углов). Из этих свойств числа $I_P(M)$ легко вытекает (ср. рассуждения на стр. 28), что если M и M' — два G-равносоставленных многоугольника, то $I_P(M) = I_P(M') + n\pi$, где n — некоторое целое число.

Пусть теперь PQR и PQS — два равных равнобедренных тупоугольных треугольника с углом α при основании, из которых один имеет вершину тупого угла в P, а другой — в Q (черт. 39). Так как точка P является отмеченной, а точка Q — нет, то число $I_P(PQR)$ равно $\pi - 2\alpha$ или $\pi - \alpha$ (в зависимости от того, будет ли отмеченной точка R); число же $I_P(PQS)$ равно α или 2α. Поэтому равенство

$$I_P(PQR) = I_P(PQS) + n\pi$$

не может иметь места ни при каком целом n $\left(\text{ибо } \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$, и треугольники PQR и PQS не являются G-равносоставленными. Это однако, противоречит свойствам группы G (равновеликие, а тем более равные многоугольники должны быть G-равносоставленными). Полученное противоречие доказывает лемму.



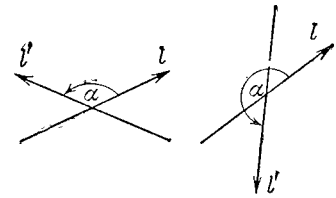
Черт. 39.

Лемма 13. *Группа G содержит хотя бы одну центральную симметрию.*

Отметим сначала (без доказательств [1])) некоторые свойства движений. Каждое движение плоскости имеет один из следующих трех видов: оно является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо так называемой *скользящей симметрией*, которая представляет собой симметрию относительно некоторой прямой, сопровождающуюся параллельным переносом вдоль этой прямой. Прямая эта называется *осью* скользящей симметрии. Ось определяется однозначно (т. е. две скользящие симметрии, оси которых не совпадают, представляют собой р а з н ы е движения). Наконец, укажем, что произведение двух скользящих симметрий, оси которых составляют друг с другом угол α, есть п о в о р о т на угол 2α.

[1]) Доказательства свойств движений можно найти, например, в первой части книги: И. М. Я г л о м, Геометрические преобразования, Гостехиздат, 1955.

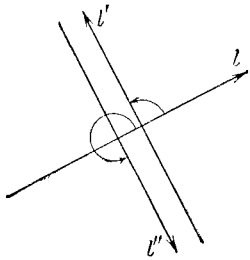
Перейдем к доказательству леммы 13. Выберем следующим образом прямую l: если в группе G имеется хотя бы одна скользящая симметрия, то за l примем ось одной из них; в противном случае прямую l выберем произвольно. На прямой l выберем какое-либо направление. Пусть l' — произвольная направленная прямая, а α — угол между l и l' (черт. 40); прямую l' будем считать *отмеченной*, если в группе G имеется поворот на угол α. В частности, всякую прямую, параллельную l (т. е. образующую с l нулевой угол), следует считать отмеченной.



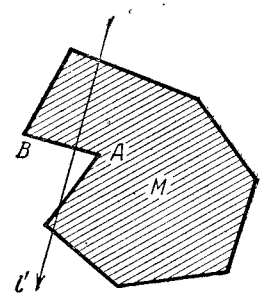
Черт. 40.

Предположим теперь (вопреки утверждению леммы), что в группе G нет ни одной центральной симметрии. Тогда для любой отмеченной прямой l' прямая l'', параллельная l', но имеющая противоположное направление, не является отмеченной (в противном случае группа G содержала бы два поворота, углы которых отличаются на π, а потому содержала бы и поворот на угол π, т. е. центральную симметрию, см. черт. 41).

Рассмотрим произвольный многоугольник M и пусть AB — его сторона, а l' — прямая, пересекающая эту сторону и перпендикулярная к ней. Выберем на прямой l' такое направление, что, идя по прямой l' в этом направлении, мы будем при пересечении стороны



Черт. 41.

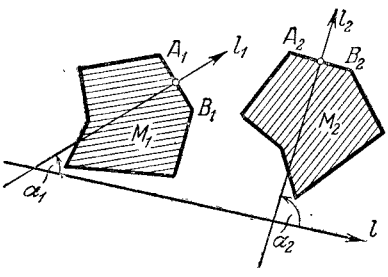


Черт. 42.

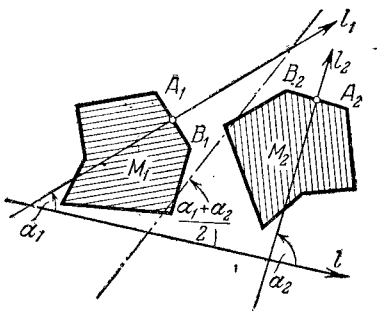
AB выходить изнутри многоугольника M наружу (черт. 42). Если направленная таким образом прямая l' является отмеченной, то стороне AB припишем знак $+$; если же прямая l'', параллельная l', но противоположно направленная, является отмеченной, то припишем этой стороне знак $-$; наконец, если ни одна из этих прямых не является отмеченной, то стороне AB поставим в соответствие число нуль. Составим теперь алгебраическую сумму длин сторон многоугольника M, учитывая указанные знаки (если стороне AB поставлено в соответствие число нуль, то она совсем не войдет в рассматриваемую алгебраическую сумму). Полученную алгебраическую сумму обозначим через $J_l'(M)$.

Число $J'_l(M)$ обладает следующими двумя свойствами: 1) оно аддитивно (ср. формулу (3)) и 2) оно инвариантно (если многоугольники M_1 и M_2 получаются друг из друга с помощью некоторого движения, принадлежащего группе G, то $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$). Аддитивность устанавливается почти дословным повторением доказательства леммы 11.

Докажем инвариантность. Пусть g — принадлежащее группе G движение, которое переводит многоугольник M_1 в M_2; A_1B_1 — сторона многоугольника M_1, а A_2B_2 — соответствующая ей сторона многоугольника M_2 (т. е. сторона, в которую переходит A_1B_1 в результате движения g). Пусть, далее, l_1 — прямая, перпендикулярная к стороне A_1B_1, а l_2 — прямая, перпендикулярная к A_2B_2, причем каждая из этих



Черт. 43.



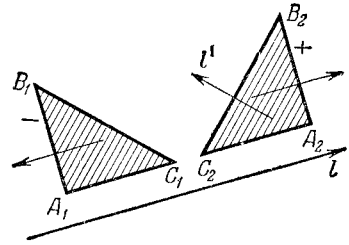
Черт. 44.

прямых направлена так, что при пересечении указанной стороны мы выходим изнутри многоугольника наружу (черт. 43). Углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с прямой l, обозначим соответственно через α_1 и α_2. Предположим, что прямая l_1 является отмеченной, и покажем, что l_2 также есть отмеченная прямая. Если движение g есть параллельный перенос, то прямая l_2 параллельна прямой l_1 и одинаково с ней направлена, а потому является отмеченной. Если g есть поворот, то угол этого поворота равен $\alpha_2 - \alpha_1$, а так как в G имеется поворот на угол α_1 (ибо прямая l_1 отмечена), то в G имеется также поворот на угол $(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \alpha_2$; это означает, что прямая l_2 отмечена. Наконец, если g есть скользящая симметрия, то ось ее составляет с прямой l (которая также является в этом случае осью скользящей симметрии) угол $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (черт. 44), и потому в группе G имеется поворот на угол $\alpha_1 + \alpha_2$. Кроме того, в G имеется поворот на угол α_1 (ибо прямая l_1 отмечена), а потому и поворот на угол $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 = \alpha_2$. Таким образом, и в этом случае прямая l_2 отмечена. Итак, если стороне A_1B_1 многоугольника M_1 поставлен в соответствие знак $+$ (т. е. прямая l_1 отмечена), то стороне A_2B_2 многоугольника M_2 также поставлен в соответствие знак $+$ (прямая l_2 также отмечена). Аналогично

устанавливается, что если стороне A_1B_1 поставлен в соответствие знак —, то и стороне A_2B_2 поставлен в соответствие знак —. Наконец, если стороне A_1B_1 поставлено в соответствие число нуль, то это же имеет место и для стороны A_2B_2 (многоугольник M_1 получается из M_2 с помощью движения g^{-1}, и если бы стороне A_2B_2 соответствовал знак + или —, то такой же знак соответствовал бы и стороне A_1B_1). Итак, соответствующие стороны многоугольников M_1 и M_2 берутся в алгебраических суммах $J'_l(M_1)$ и $J'_l(M_2)$ с одинаковыми коэффициентами, так что $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$.

Из аддитивности и инвариантности числа $J'_l(M)$ вытекает (ср. рассуждение на стр. 28), что если многоугольники M_1 и M_2 являются G-равносоставленными, то $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$.

Рассмотрим теперь два равных равнобедренных прямоугольных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, расположенных так, как указано на черт. 45. Стороне B_2C_2 треугольника $A_2B_2C_2$ соответствует число нуль; действительно, прямая l', перпендикулярная к этой стороне, составляет с l угол $\frac{3}{4}\pi$, а поворот на угол $\frac{3}{4}\pi$ в группу G не входит (ибо четырехкратное применение этого поворота дает поворот на угол 3π, т. е. центральную симметрию). Аналогично, каждой из сторон A_1C_1, B_1C_1, A_2C_2 соответствует число нуль. Наконец, стороне A_2B_2 соответствует знак +, а стороне A_1B_1 знак —. Мы видим, что $J'_l(A_1B_1C_1) \neq J'_l(A_2B_2C_2)$ (так как одно из этих чисел положительно, а другое отрицательно), и потому треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ не являются G-равносоставленными. Это, однако, противоречит свойствам группы G.



Черт. 45.

Лемма 14. *Группа G содержит все центральные симметрии.*

Пусть s — центральная симметрия, принадлежащая группе G (лемма 13), O_1 — центр этой симметрии, а O — произвольная точка на плоскости. Пусть, далее, g — принадлежащее группе G движение, переводящее точку O в O_1 (лемма 12). Тогда движение gsg^{-1}, принадлежащее группе G, как легко видеть, оставляет точку O на месте и потому представляет собой центральную симметрию относительно точки O. Таким образом, центральная симметрия относительно произвольной точки O принадлежит группе G.

Для доказательства теоремы теперь остается лишь заметить, что согласно лемме 7 группа G содержит также все параллельные переносы.

ГЛАВА II

РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ МНОГОГРАННИКОВ

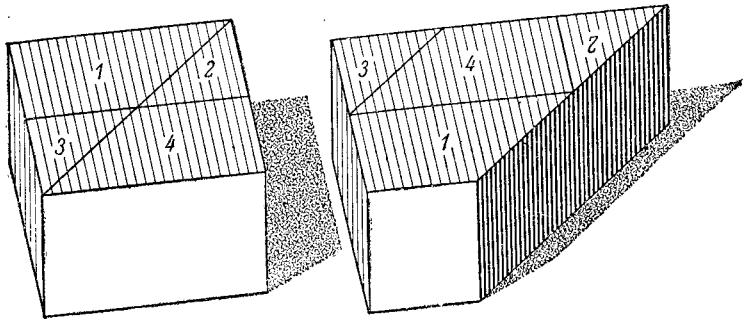
§ 5. Теоремы Дена и Хадвигера

1. Равносоставленные многогранники. В этой главе мы рассмотрим вопрос о равносоставленности и равнодополняемости для пространственных фигур (для многогранников). Два многогранника называются равносоставленными, если, определенным образом разрезав один из них на конечное число частей, можно составить из них второй многогранник.

Ясно, что два равносоставленных многогранника равновелики, т. е. имеют одинаковый объем. Естественно возникает обратный вопрос: всякие ли два многогранника, имеющие одинаковый объем, равносоставлены? Иначе говоря, справедлива ли в пространстве теорема, аналогичная теореме Бояй — Гервина? Мы увидим ниже, что на этот вопрос приходится дать отрицательный ответ.

Прежде всего постараемся понять, что значит отрицательный ответ на поставленный вопрос. Значит ли это, что никакие два многогранника, имеющие одинаковый объем, не равносоставлены? Нет, конечно. Ясно, что равносоставленные многогранники существуют. Например, две прямые призмы с одинаковой высотой и одинаковой площадью оснований равносоставлены (черт. 46). Это легко следует из теоремы Бояй — Гервина. (Ниже, на стр. 56, будет доказано, что любые две равновеликие призмы, прямые или наклонные, равносоставлены.) Что же в таком случае означает отрицательный ответ на поставленный вопрос? Он означает, что не всякие многогранники, имеющие одинаковый объем, равносоставлены. Иначе говоря, некоторые многогранники одинакового объема и являются равносоставленными (например, призмы), однако *можно найти также и такие многогранники, которые*

имеют одинаковый объем, но не равносоставлены. Впервые этот факт был доказан немецким математиком Деном (1901 г.). Он установил, что куб и правильная треугольная пирамида (тетраэдр) одинакового объема не равносоставлены. Конечно, можно найти и другие многогранники, имеющие одинаковый объем, но не являющиеся равносоставленными.



Черт. 46.

Этот параграф содержит доказательство теоремы Дена о неравносоставленности куба и правильного тетраэдра. В доказательстве используются остроумные идеи, принадлежащие швейцарскому геометру Хадвигеру.

2. Теорема Хадвигера. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — какие-либо действительные числа. Будем говорить, что эти числа *зависимы*, если можно найти такие, не все обращающиеся в нуль, целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, что имеет место соотношение

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k = 0. \qquad (9)$$

Соотношение (9) будем называть *зависимостью.* Подчеркнем еще раз, что все числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ предполагаются целыми (положительными, отрицательными или равными нулю), причем среди них обязательно должны быть числа, отличные от нуля.

Между одними и теми же числами могут существовать различные зависимости. Возьмем, например, числа

$$1, \sqrt{2} - 1, \ 3\sqrt{2} + 1, \ 2\sqrt{2}.$$

Легко проверить, что между этими числами имеются следующие зависимости:

$$2\cdot 1 + 1\cdot(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 1\cdot 2\sqrt{2} = 0,$$
$$4\cdot 1 + 3\cdot(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 0\cdot 2\sqrt{2} = 0,$$
$$0\cdot 1 + (-1)(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 2\cdot 2\sqrt{2} = 0.$$

Заметим, что два несоизмеримых числа α_1 и α_2 (т. е. два отличных от нуля числа, отношение которых иррационально) не могут быть зависимыми. Действительно, из существования зависимости

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 = 0$$

вытекало бы, что частное $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ равно отношению $-\frac{n_2}{n_1}$ двух целых чисел, т. е. рационально.

Предположим теперь, что каждому из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ поставлено в соответствие еще одно число:

числу α_1 поставлено в соответствие число $f(\alpha_1)$,
» α_2 » » » » $f(\alpha_2)$,
. . . . . .
» α_k » » » » $f(\alpha_k)$.

Будем говорить, что числа $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ образуют *аддитивную функцию*[1]), соответствующую числам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, если они обладают следующим свойством: для каждой зависимости

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k = 0,$$

существующей между числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, точно такая же зависимость имеется и между числами $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$, т. е.

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n_k f(\alpha_k) = 0.$$

В остальном же числа $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ могут быть какими угодно.

Возьмем для примера числа $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{5}$. Так как эти числа несоизмеримы, то между ними никакой зависимости не существует. Поэтому не требуется никакой зависимости и между числами $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$, т. е. для получения аддитивной функции можно выбирать числа $f(1)$ и $f(\sqrt{5})$ совершенно произвольно. Если же взятые числа окажутся зависимыми, то значения аддитивной функции также связаны зависимостями.

---

[1]) С современной точки зрения мы имеем функцию, если каждому элементу некоторого множества поставлен в соответствие (по некоторому правилу) определенный элемент другого множества. Так, ставя в соответствие каждому действительному числу x число $\sin x$, мы получаем функцию (синус); ставя в соответствие каждому целому положительному числу наибольший его простой делитель, мы получаем функцию; ставя в соответствие числам $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ некоторые другие числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k)$, мы также имеем функцию.

Пусть, наконец,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k \tag{10}$$

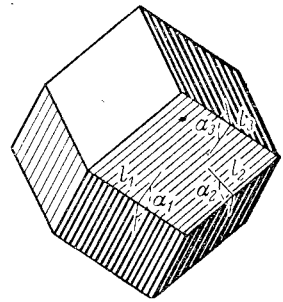
— все внутренние двугранные углы некоторого многогранника A, выраженные в радианах, а $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_k$ — длины ребер, соответствующих этим двугранным углам (черт. 47). Если выбрана некоторая аддитивная функция

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \ldots,\ f(\alpha_k) \tag{11}$$

для чисел (10), то сумму

$$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \ldots + l_k f(\alpha_k) \tag{12}$$

мы обозначим через $f(A)$ и будем называть ее *инвариантом* многогранника A. Инвариант $f(A)$ зависит не только от выбора самого многогранника A, но также и от выбора аддитивной функции (11).



Черт. 47.

Теперь мы можем сформулировать следующую интересную теорему.

Теорема Хадвигера. *Даны два многогранника A и B, имеющих одинаковый объем. Обозначим через $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p$ все внутренние двугранные углы многогранника A, выраженные в радианной мере, а через $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q$ — все внутренние двугранные углы многогранника B. К числам $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q$ присоединим еще число π. Если для полученной системы чисел*

$$\pi,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_q \tag{13}$$

можно подобрать такую аддитивную функцию

$$f(\pi),\ f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \ldots,\ f(\alpha_p),\ f(\beta_1),\ f(\beta_2),\ \ldots,\ f(\beta_q), \tag{14}$$

что выполнено соотношение

$$f(\pi) = 0, \tag{15}$$

а соответствующие инварианты многогранников A и B не одинаковы:

$$f(A) \neq f(B), \tag{16}$$

то многогранники A и B не равносоставлены.

Доказательство теоремы Хадвигера мы рассмотрим ниже (стр. 45), а сейчас покажем, как из нее вытекает теорема Дена о неравносоставленности куба и правильной пирамиды.

3. Теорема Дена. Докажем прежде всего следующую лемму, с помощью которой легко установить (на основании теоремы Хадвигера) справедливость теоремы Дена.

Лемма 15. *Пусть n — целое число, большее двух, а φ — такой угол, выраженный в радианной мере, косинус которого равен $\frac{1}{n}$ (т. е. $\varphi = \arccos\frac{1}{n}$). Тогда число φ несоизмеримо с π, т. е. не существует никакой зависимости*

$$n_1\varphi + n_2\pi = 0 \tag{17}$$

с целыми отличными от нуля коэффициентами n_1, n_2.

Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что имеет место соотношение (17), в котором $n_1 \neq 0$. Мы можем считать, что $n_1 > 0$ (иначе можно было бы в соотношении (17) изменить знаки на обратные). Так как $n_1\varphi = -n_2\pi$ есть целочисленное кратное угла π, то $\cos n_1\varphi$ равен или $+1$, или -1, т. е. является целым числом. Это утверждение мы и приведем к противоречию. Именно, мы покажем, что ни при каком целом $k > 0$ число $\cos k\varphi$ не является целым.

На основании теоремы сложения, известной из курса тригонометрии, мы можем написать:

$$\cos(k+1)\varphi = \cos(k\varphi + \varphi) = \cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi,$$
$$\cos(k-1)\varphi = \cos(k\varphi - \varphi) = \cos k\varphi\cos\varphi + \sin k\varphi\sin\varphi.$$

Складывая эти два равенства, получаем:

$$\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi\cos\varphi$$

или

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{n}\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \tag{18}$$

$\left(\text{так как } \cos\varphi = \frac{1}{n}\right)$. Дальнейшую часть доказательства проведем отдельно для четных и нечетных значений n.

Случай 1. Число n нечетно [1]). Покажем (с помощью метода полной математической индукции), что в этом случае $\cos kx$ выражается дробью, знаменатель которой равен n^k, а числитель взаимно прост с n; отсюда и будет следовать, что

---

[1]) Только этот случай (а именно, $n = 3$) и используется при доказательстве теоремы Дена.

число $\cos kx$ при $k>0$ не является целым. Для $k=1$ и $k=2$ это утверждение непосредственно проверяется:

$$\cos\varphi=\frac{1}{n},$$

$$\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\frac{2}{n^2}-1=\frac{2-n^2}{n^2}$$

(число 2 взаимно просто с n, так как n нечетно). Предположим, что для всех чисел 1, 2, ..., k наше утверждение доказано, и докажем его для числа $k+1$. Согласно предположению индукции имеем:

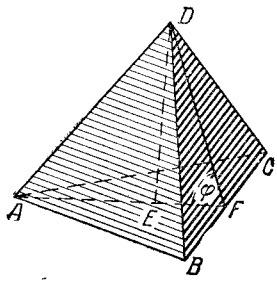
$$\cos k\varphi=\frac{a}{n^k},\quad \cos(k-1)\varphi=\frac{b}{n^{k-1}},$$

где a и b — взаимно простые с n числа. Отсюда на основании равенства (18) получаем:

$$\cos(k+1)\varphi=\frac{2}{n}\frac{a}{n^k}-\frac{b}{n^{k-1}}=\frac{2a-bn^2}{n^{k+1}}.$$

Так как число a и число 2 не имеют с n общих множителей, то числитель $2a-bn^2$ взаимно прост с n. Индукция проведена.

Случай 2. Число n четно, т. е. $n=2m$. В этом случае $\cos k\varphi$ выражается дробью, знаменатель которой имеет вид $2m^k$, а числитель взаимно прост с m (это доказывается по индукции совершенно так же, как в случае 1). Поэтому числитель при $k>0$ не делится нацело на знаменатель.



Черт. 48.

Теорема Дена. *Куб и правильный тетраэдр, имеющие одинаковый объем, не равносоставлены.*

Доказательство. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ опустим из точки D высоту DE (черт. 48). Точка E является центром равностороннего треугольника ABC, так что отрезок AF, проходящий через точку E, есть медиана. Поэтому F — середина ребра BC, а отрезок DF является медианой треугольника BCD. Отрезок EF составляет третью часть медианы AF или медианы DF, т. е.

$$EF:DF=1:3.$$

Иначе говоря, обозначив через φ угол F прямоугольного

треугольника DEF (т. е. двугранный угол тетраэдра $ABCD$), мы найдем:

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Теперь применим теорему Хадвигера. Каждый двугранный угол куба A равен $\frac{\pi}{2}$; двугранный угол правильного тетраэдра B мы обозначили через φ. Поэтому числа (13), о которых идет речь в теореме Хадвигера, здесь будут следующими:

$$\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \varphi. \tag{20}$$

Найдем, какие зависимости существуют между этими числами. Пусть имеется зависимость

$$n_1\pi + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\varphi = 0, \tag{21}$$

где n_1, n_2, n_3 — целые числа. Тогда

$$(2n_1 + n_2)\pi + 2n_3\varphi = 0,$$

т. е. мы получаем зависимость между числами π и φ. Но такой зависимости с ненулевыми коэффициентами не существует, так как в силу леммы 15 угол φ несоизмерим с π (см. (19)). Поэтому $2n_1 + n_2 = 0$, $n_3 = 0$, и соотношение (21) принимает вид

$$n_1\pi + (-2n_1)\frac{\pi}{2} = 0. \tag{22}$$

Других зависимостей между числами (20) нет. Положим:

$$f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\varphi) = 1. \tag{23}$$

Это дает аддитивную функцию, определенную для чисел (20). Действительно, для любой зависимости между числами (20), т. е. для соотношения (22), мы имеем аналогичную зависимость между числами (23):

$$n_1 f(\pi) + (-2n_1) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Итак, мы получили аддитивную функцию, заданную для чисел (20) и удовлетворяющую соотношению (15). Остается установить соотношение (16), и неравносоставленность куба и пирамиды будет доказана.

Куб A имеет 12 ребер. Обозначим длину его ребра через l. Тогда инвариант $f(A)$ имеет для куба A значение

$$f(A) = 12lf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(см. (23)). Длину ребра правильной пирамиды B обозначим через m. Тогда инвариант $f(B)$ пирамиды B примет вид

$$f(B) = 6mf(\varphi) = 6m \neq 0$$

(см. (23)). Таким образом, $f(A) \neq f(B)$, и потому куб A и пирамида B не являются равносоставленными. Теорема Дена доказана.

Остается доказать теорему Хадвигера. К ее доказательству мы и переходим.

4. Доказательство теоремы Хадвигера.

Лемма 16. *Пусть*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \tag{24}$$

и

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l \tag{25}$$

— действительные числа, а

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k) \tag{26}$$

— аддитивная функция для чисел (24). *Тогда можно подобрать такие числа*

$$f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_l), \tag{27}$$

что числа (26) *и* (27) *образуют аддитивную функцию для чисел* (24) *и* (25) *вместе взятых. Иначе говоря, аддитивную функцию для чисел* (24) *можно дополнить до аддитивной функции для чисел* (24), (25).

Достаточно рассмотреть случай, когда к числам (24) добавляется только одно число γ (так как числа (25) можно добавлять не все сразу, а одно за другим). Итак, задана аддитивная функция (26) для чисел (24) и, кроме того, дано число γ. Мы должны подобрать такое число $f(\gamma)$, что система чисел

$$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k), f(\gamma) \tag{28}$$

будет представлять собой аддитивную функцию для чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \gamma. \tag{29}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Между числами (29) не существует никакой зависимости

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0,$$

в которой коэффициент n при числе γ был бы отличен от нуля. Иначе говоря, число γ ни в одну зависимость не входит. В этом случае число $f(\gamma)$ никакими условиями не связано, т. е. за $f(\gamma)$ можно принять любое действительное число.

Случай 2. Между числами (29) имеется зависимость, в которую входит число γ:

$$n'_1\alpha_1 + n'_2\alpha_2 + \ldots + n'_k\alpha_k + n'\gamma = 0, \quad n' \neq 0. \tag{30}$$

В этом случае мы определим число $f(\gamma)$ из соотношения

$$n'_1 f(\alpha_1) + n'_2 f(\alpha_2) + \ldots + n'_k f(\alpha_k) + n' f(\gamma) = 0, \tag{31}$$

т. е. положим:

$$f(\gamma) = -\frac{n'_1}{n'} f(\alpha_1) - \frac{n'_2}{n'} f(\alpha_2) - \ldots - \frac{n'_k}{n'} f(\alpha_k).$$

Покажем, что таким путем мы получаем аддитивную функцию для чисел (29). Пусть

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0 \tag{32}$$

— какая-либо зависимость между числами (29) (отличная от зависимости (30) или совпадающая с ней). Мы должны показать, что такая же зависимость имеется и между числами (28), т. е. что имеет место соотношение

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n_k f(\alpha_k) + n f(\gamma) = 0. \tag{33}$$

Покажем это. Умножим соотношение (32) на n' и вычтем из него соотношение (30), умноженное на n:

$$(n'n_1 - nn'_1)\alpha_1 + (n'n_2 - nn'_2)\alpha_2 + \ldots + (n'n_k - nn'_k)\alpha_k = 0.$$

Мы получаем зависимость между числами (24), и так как (26) есть аддитивная функция для этих чисел, то имеет место соотношение

$$(n'n_1 - nn'_1) f(\alpha_1) + (n'n_2 - nn'_2) f(\alpha_2) + \ldots$$
$$\ldots + (n'n_k - nn'_k) f(\alpha_k) = 0.$$

Прибавив к этому соотношению равенство (31), умноженное на n, найдем:

$$n'n_1 f(\alpha_1) + n'n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n'n_k f(\alpha_k) + n'n f(\gamma) = 0,$$

Наконец, сокращая это равенство на число $n' \neq 0$, мы и получим (33). Таким образом, числа (28) дают нам аддитивную функцию.

Лемма 17. *Пусть A — многогранник, произвольным образом разбитый на конечное число меньших многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Обозначим через*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \tag{34}$$

все двугранные углы многогранника A, а через

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \tag{35}$$

— все двугранные углы всех многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Присоединим к числам (34) и (35) еще число π и предположим, что для полученной системы чисел

$$\pi; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \tag{36}$$

задана аддитивная функция

$$f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_p), f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_r), \tag{37}$$

удовлетворяющая условию

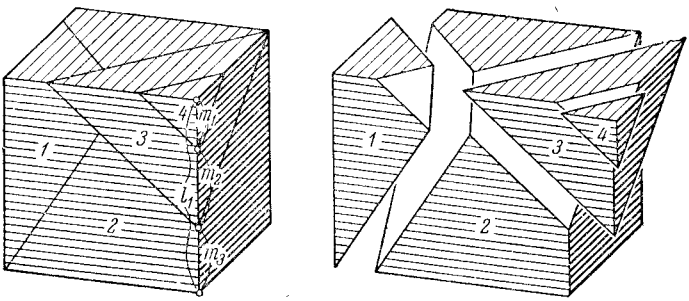
$$f(\pi) = 0. \tag{38}$$

Тогда инварианты $f(A), f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_k)$ рассматриваемых многогранников связаны соотношением

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_k). \tag{39}$$

Для доказательства рассмотрим все отрезки, являющиеся ребрами многогранников $A, M_1, M_2, \ldots, M_k$. Отметим на этих отрезках все точки, являющиеся вершинами многогранников $A, M_1, M_2, \ldots, M_k$, а также все точки, в которых пересекаются ребра между собой. Тогда мы получим конечное число более мелких отрезков. Эти более мелкие отрезки будем (следуя В. Ф. Кагану) называть *звеньями*. На черт. 49 изображено разбиение куба на многогранники; ребро куба, обозначенное на этом чертеже через l_1, состоит из трех звеньев m_1, m_2, m_3. Вообще, каждое ребро каждого из многогранников $A, M_1, M_2, \ldots, M_k$ состоит из одного или нескольких звеньев. Каждое звено многогранника A (т. е. звено, лежащее на одном из ребер многогранника A) является также звеном одного или нескольких многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Возьмем какое-либо звено многогранника A,

и пусть m — его длина, а α — соответствующий двугранный угол многогранника A. Тогда α есть одно из чисел (34), и потому определено число $f(\alpha)$. Произведение $m \cdot f(\alpha)$ назовем *весом* рассматриваемого звена в многограннике A. Точно так же определяются веса звеньев в многогранниках $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Заметим, что одно и то же звено может иметь разный вес в различных примыкающих к этому звену многогранниках: ведь эти примыкающие многогранники могут иметь различные двугранные углы при этом звене.



Черт. 49.

Возьмем теперь все звенья многогранника A, найдем их веса в многограннике A и составим сумму всех этих весов. Нетрудно видеть, что эта сумма равна инварианту $f(A)$ многогранника A. Действительно, рассмотрим ребро l_1 многогранника A, и пусть оно состоит, например, из трех звеньев, имеющих длины m_1, m_2, m_3 (черт. 49). Тогда каждому звену m_1, m_2, m_3 соответствует в многограннике A один и тот же двугранный угол α_1, а именно, двугранный угол при ребре l_1. Поэтому сумма весов звеньев m_1, m_2, m_3 равна

$$m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1).$$

Точно так же сумма весов всех звеньев, из которых состоит ребро l_2 многогранника A, равна $l_2 f(\alpha_2)$ и т. д. Поэтому сумма весов всех звеньев многогранника A совпадает с суммой (12), т. е. равна инварианту $f(A)$ многогранника A.

Совершенно так же, инвариант каждого из многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$ равен сумме весов всех его звеньев (конечно, вес каждого звена вычисляется в рассматриваемом многограннике).

Теперь уже нетрудно установить справедливость соотношения (39). Для вычисления суммы, стоящей в правой части

этого соотношения, нужно взять сумму весов всех звеньев по всем многогранникам M_1, M_2, ..., M_k. Найдем, с каким коэффициентом будет входить в эту сумму некоторое звено m. Обозначим все двугранные углы многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_k$, примыкающие к звену m, через

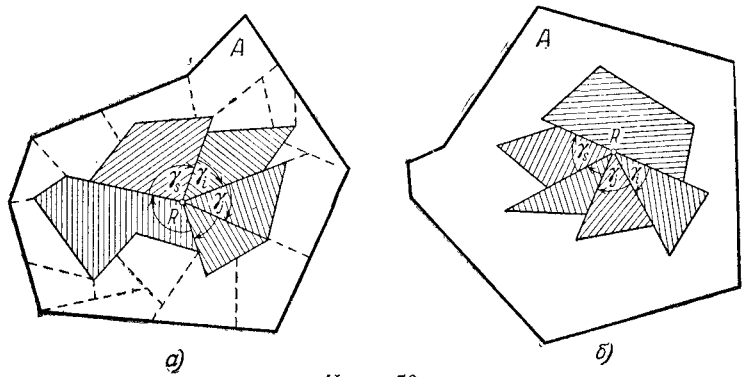
$$\gamma_i, \gamma_j, \ldots, \gamma_s$$

(эти величины содержатся среди чисел (35)). Тогда вес рассматриваемого звена в многограннике с двугранным углом γ_i равен $mf(\gamma_i)$; вес его в многограннике с двугранным углом γ_j равен $mf(\gamma_j)$ и т. д. Таким образом, сумма весов звена m по всем тем многогранникам M_1, M_2, ..., M_k, которые примыкают к этому звену, равна

$$mf(\gamma_i) + mf(\gamma_j) + \ldots + mf(\gamma_s). \qquad (40)$$

Все звенья можно разбить на три группы.

1) Звенья, которые целиком (кроме, может быть, концов) расположены внутри многогранника A. Если m есть такое



а) *б)*

Черт. 50.

звено и если каждый из многогранников M_1, M_2, ..., M_k, примыкающих к отрезку m, имеет этот отрезок своим звеном, то двугранные углы примыкающих к звену m многогранников образуют в сумме полный угол (черт. 50, *а*; на этом чертеже, так же как и на чертежах 50, *б*, 51, 52, *а*, 52, *б* изображено сечение многогранника A и многогранников, примыкающих к отрезку m, плоскостью, перпендикулярной к звену m; само звено m изображено на этих чертежах одной точкой R). Таким образом, в этом случае $\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = 2\pi$ или

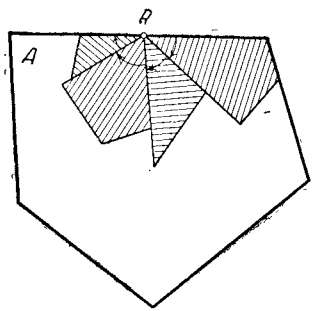
$$\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s - 2\pi = 0.$$

Это есть зависимость между числами (36), и потому имеем:

$$f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)-2f(\pi)=0.$$

Согласно (38) мы получаем отсюда $f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)=0$, и выражение (40) обращается в нуль.

Если же m есть звено, расположенное внутри многогранника A, но один[1]) из многогранников M_1, M_2, ..., M_k, примыкающих к отрезку m, *не имеет его своим звеном* (т. е. отрезок m расположен внутри грани одного из многогранников M_1, M_2, ..., M_k), то двугранные углы остальных примыкающих к отрезку m многогранников составляют в сумме развернутый угол (черт. 50, *б*), т. е.



Черт. 51.

$$\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\pi.$$

Отсюда, как и выше, вытекает, что выражение (40) обращается в нуль.

Таким образом, звенья, расположенные внутри многогранника A, можно при вычислении правой части равенства (39) не учитывать (для них сумма весов равна нулю).

2) Звенья, расположенные на гранях многогранника A, но не на его ребрах. В этом случае

$$\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\pi$$

(черт. 51), и выражение (40), так же как и в предыдущем случае, обращается в нуль.

3) Остается рассмотреть звенья, лежащие на ребрах многогранника A. В этом случае сумма $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s$ равна или двугранному углу α соответствующего ребра:

$$\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\alpha$$

(черт. 52, *а*), или углу $\alpha-\pi$ (т. е. $\gamma_i+\gamma_j+\ldots+\gamma_s=\alpha-\pi$; это может случиться, если угол α — тупой, см. черт. 52, *б*).

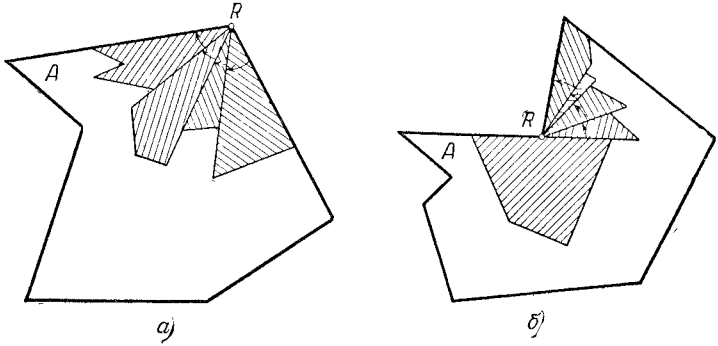
[1]) Если два многогранника, примыкающих к отрезку m, не имеют его своим звеном, т. е. если отрезок m лежит внутри граней двух примыкающих друг к другу многогранников, то только эти два многогранника и примыкают к отрезку m, так что этот отрезок не лежит ни на одном ребре многогранников M_1, M_2, ..., M_k и потому не является звеном.

В обоих случаях имеем:

$$f(\gamma_i)+f(\gamma_j)+\ldots+f(\gamma_s)=f(\alpha),$$

и выражение (40) оказывается равным $mf(\alpha)$, т. е. весу рассматриваемого звена в многограннике A. Итак, сумма, стоящая в правой части соотношения (39), равна сумме весов всех звеньев многогранника A, т. е. равна инварианту $f(A)$.

Доказательство теоремы Хадвигера. Допустим, что многогранники A и B равносоставлены, и пусть



а) б)

Черт. 52.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ — такие многогранники, из которых можно составить как A, так и B. Все внутренние двугранные углы всех многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. Согласно лемме 16 аддитивную функцию (14), заданную для чисел (13), можно дополнить числами $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_r)$ так, что мы получим аддитивную функцию для чисел

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r.$$

(Эта аддитивная функция попрежнему удовлетворяет условию (15).) Так как многогранник A составляется из многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, то (лемма 17) инвариант $f(A)$ имеет значение

$$f(A)=f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n).$$

Но многогранник B также составляется из $M_1, M_2, \ldots, M_n$, и потому

$$f(B)=f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n).$$

Таким образом, $f(A)=f(B)$, что противоречит соотношению (16). Итак, мы видим, что предположение о равносоставленности многогранников A и B приводит к противоречию.

5. n-мерные многогранники. Для читателя, знакомого с понятием n-мерного пространства, можно добавить следующее. Пусть M — некоторый n-мерный многогранник, а L — его $(n-2)$-мерная грань. Тогда существует ровно две $(n-1)$-мерных грани многогранника M, примыкающих к грани L; обозначим их через A и B. Угол между гранями A и B называется *двугранным углом* при грани L. Он измеряется своим *линейным углом*, т. е. углом между двумя перпендикулярами к грани L, один из которых проходит в грани A, а другой — в грани B.

Если $L_1, \ldots, L_k$ — все $(n-2)$-мерные грани n-мерного многогранника M, $l_1, \ldots, l_k$ — их $(n-2)$-мерные объемы, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — двугранные углы многогранника M при этих гранях, то, используя аддитивную функцию (11) для чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (см. стр. 41), мы можем определить сумму (12), которую условимся называть *инвариантом* многогранника M. При таком определении инварианта теорема Хадвигера (стр. 41) остается справедливой (вместе с доказательством) и для n-мерных многогранников.

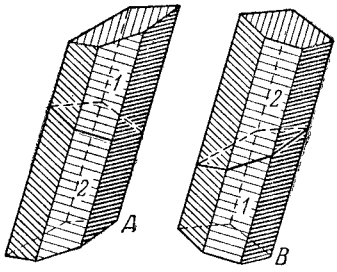
Теорема Дена также легко обобщается. Правильная n-мерная пирамида (симплекс) имеет двугранные углы, равные $\arccos\frac{1}{n}$ (в этом легко убедиться по индукции с помощью рассуждений, вполне аналогичных тем, которые приведены на стр. 43—44). Из этого и из леммы 15 вытекает, что *при* $n \geqslant 3$ *правильная пирамида и куб, имеющие одинаковый объем, не равносоставлены* (см. рассуждения на стр. 44—45).

§ 6. О методах вычисления объемов

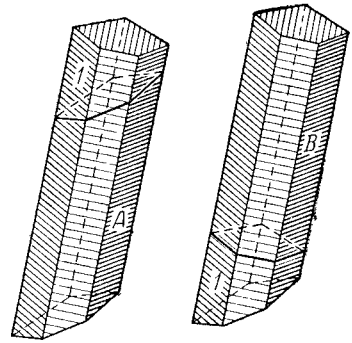
1. О методе пределов. Вспомним, как обстояло дело при вычислении площадей плоских фигур. После установления формулы для площади прямоугольника вычисление площадей других многоугольников проводится весьма простыми приемами: методом разложения или методом дополнения. *Метод пределов* применяется в планиметрии только для вычисления площадей криволинейных фигур.

При вычислении объемов пространственных фигур в некоторых случаях применяется также метод разложения (или дополнения). Например, для доказательства теоремы о том, что объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на длину бокового ребра, применяют метод разложения (черт. 53) или дополнения (черт. 54). Иначе говоря, всякая наклонная призма равносоставлена (и равнодополняема) с прямой призмой, у которой длина бокового ребра такая же, как и у наклонной призмы, а основанием является перпендикулярное сечение наклонной призмы. Так как в свою очередь всякая прямая призма равносоставлена (и равнодополняема) с прямоугольным параллелепипедом, то мы получаем такую теорему: *всякая наклонная призма равносоставлена (и равнодополняема) с прямоугольным параллелепипедом*

того же объема. Таким образом, для вычисления объема любой призмы (прямой или наклонной) можно с успехом пользоваться и методом разложения, и методом дополнения.

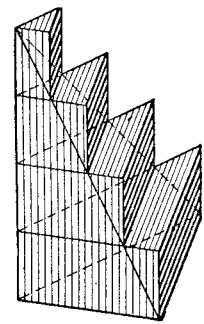


Черт. 53.



Черт. 54.

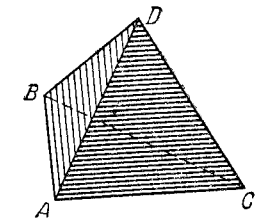
Однако при вычислении объема пирамиды не пользуются ни методом разложения, ни методом дополнения. На помощь привлекается *метод пределов*: рассматривают довольно сложные ступенчатые тела (черт. 55) и затем переходят к пределу при неограниченно возрастающем числе ступенек («чертова лестница»). В чем здесь дело? Может быть, это объясняется лишь тем, что до сих пор математикам «не посчастливилось» найти простой вывод формулы объема пирамиды методом разложения или дополнения? Оказывается, что это не так: методы разложения и дополнения вообще бессильны для установления формулы объема пирамиды. Для вывода этой формулы необходимо применение более сложного метода (метода пределов).



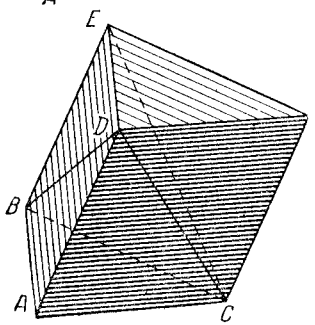
Черт. 55.

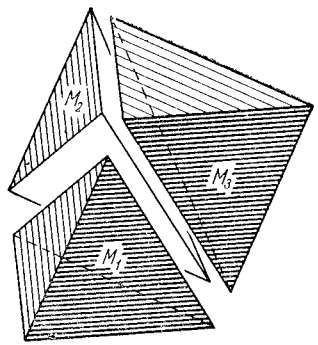
Чтобы убедиться в этом, вспомним вкратце, как обычно вычисляется объем пирамиды. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида. Построим треугольную призму (наклонную) $ABCDEF$ с основанием ABC и боковым ребром AD (черт. 56). Эту призму можно разбить на три треугольных пирамиды $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$ (черт. 57), которые мы для краткости обозначим через M_1, M_2, M_3. Легко устанавливается, что каждые две из пирамид M_1, M_2, M_3 имеют равные основания

и равные высоты. Таким образом, «остается» доказать, что *две пирамиды, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики*. Именно это предложение и доказывается с помощью метода пределов. Покажем, что с помощью метода разложения этот факт доказать невозможно. Для этого мы докажем, что существуют две такие пирамиды с равными основаниями и равными высотами, которые имеют (при некотором выборе аддитивной функции) различные инва-



Черт. 56.





Черт. 57.

рианты; тогда из теоремы Хадвигера будет следовать, что эти пирамиды не равносоставлены.

Обратимся снова к черт. 56 и 57 и предположим, что пирамида M_1 (т. е. пирамида *ABCD*, с помощью которой была построена призма *ABCDEF*) является правильной. Согласно лемме 16 аддитивную функцию (23) можно распространить в аддитивную функцию, заданную для всех двугранных углов пирамид M_1, M_2, M_3 и призмы *ABCDEF*. Тогда мы получим (лемма 17), что сумма $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)$ равна инварианту призмы *ABCDEF*. Так как эта призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом $\left(\text{у которого все двугранные углы равны } \frac{\pi}{2}\right)$, то инвариант этой призмы равен нулю. Таким образом,

$$f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=0. \qquad (41)$$

Мы уже знаем, что для правильной пирамиды M_1 инвариант $f(M_1)$ отличен от нуля. Поэтому равенства

$$f(M_1)=f(M_2)=f(M_3)$$

не могут выполняться (это противоречило бы соотношению (41)). Таким образом, среди пирамид M_1, M_2, M_3 найдутся две такие, у которых инварианты неодинаковы, и которые, следовательно, не являются равносоставленными (в силу теоремы Хадвигера). Итак, доказано, что существуют две пирамиды с равными основаниями и равными высотами, не являющиеся равносоставленными.

Теперь ясно, что метод разложения не может быть применен для вычисления объема пирамиды. Как же обстоит дело с методом дополнения? Его неприменимость доказывается так же просто на основании следующего предложения [1]).

Теорема. *При выполнении условий теоремы Хадвигера многогранники A и B не являются равнодополняемыми.*

Доказательство. Допустим противное: некоторыми многогранниками M_1, M_2, ..., M_n можно дополнить как A, так и B до одного и того же многогранника C. Согласно лемме 16 числа (14) можно дополнить до аддитивной функции, заданной для всех двугранных углов всех многогранников M_1, M_2, ..., M_n, C. Согласно лемме 17 получим:

$$f(C)=f(A)+f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n),$$
$$f(C)=f(B)+f(M_1)+f(M_2)+\ldots+f(M_n).$$

Но эти равенства противоречат соотношению (16). Таким образом, многогранники A и B не могут быть равнодополняемыми.

Из доказанной теоремы следует, что правильная треугольная пирамида и куб не только не являются равносоставленными, но также не являются равнодополняемыми. Не являются равнодополняемыми и две пирамиды с равными основаниями и равными высотами, у которых не совпадают инварианты. Так как существование двух таких пирамид выше было показано, то становится ясно, что метод дополнения также неприменим для вычисления объема пирамиды.

---

[1]) Неприменимость метода дополнения вытекает также из более общей *теоремы Сидлера*, доказываемой ниже.

2. Эквивалентность методов разбиения и дополнения. В предыдущей главе мы видели, что равносоставленность означает для плоских многоугольников то же самое, что и равнодополняемость, т. е. методы разбиения и дополнения в этом случае эквивалентны. Доказательство этого факта, приведенное в предыдущей главе, существенно опиралось на теорему Бояй—Гервина о равносоставленности л ю б ы х двух равновеликих многоугольников. Мы уже знаем, что для многогранников из равенства объемов не вытекает ни равносоставленность, ни равнодополняемость рассматриваемых многогранников. Поэтому рассуждениями, подобными тем, которые приведены в предыдущей главе, невозможно установить, эквивалентны ли методы разбиения и дополнения для многогранников. На вопрос об эквивалентности этих методов утвердительно отвечает нижеследующая

Т е о р е м а С и д л е р а. *Два многогранника тогда и только тогда равнодополняемы, когда они равносоставлены.*

К доказательству этой теоремы мы и переходим.

Л е м м а 18. *Если многогранники A и B равносоставлены, то они и равнодополняемы.*

Действительно, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — такие многогранники, из которых можно составить как A, так и B. Пусть, далее, M — такой многогранник, который содержит фигуры A и B внутри себя, а M_0 — часть многогранника M, не заполненная фигурами A и B. Нетрудно видеть, что фигурами $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ можно дополнить как A, так и B до одного и того же многогранника M. В самом деле, заполнив фигурами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ многогранник A, мы найдем, что фигуры $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ заполняют весь многогранник M, кроме многогранника B, т. е. эти фигуры дополняют B до многогранника M. Заполнив же фигурами $M_1, M_2, \ldots, M_k$ многогранник B, мы найдем, что фигурами $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ можно дополнить A до многогранника M. Таким образом, A и B равнодополняемы.

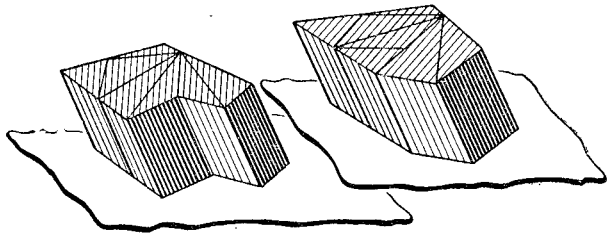
Заметим, что фигура M_0 представляет собой многогранник M, внутри которого имеются две «пустоты» в форме многогранников A и B. Если читатель не склонен считать такую фигуру «многогранником», то для завершения доказательства следует «разрезать» фигуру M_0 на несколько многогранников, не имеющих внутри себя «пустот». (Достаточно провести плоскость, пересекающую оба многогранника A, B; она рассечет фигуру M_0 на части, не содержащие «пустот».)

Л е м м а 19. *Всякие две равновеликие призмы равносоставлены.*

Заметим прежде всего, что если основания двух призм имеют одинаковую площадь и расположены в параллельных плоскостях, а образующие этих призм равны и параллельны (черт. 58), то такие призмы равносоставлены (ибо по теореме Бояй—Гервина их основания равносоставлены).

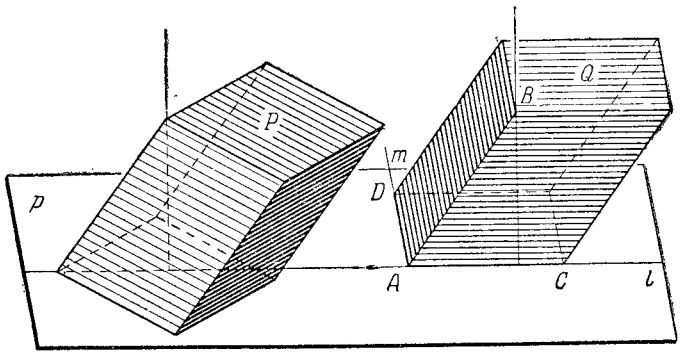
Из этого замечания вытекает, что всякая призма равносоставлена с некоторым (вообще говоря, наклонным) параллелепипедом.

Далее, всякий наклонный параллелепипед равносоставлен с некоторым прямым. Действительно, пусть p — плоскость основания наклонного параллелепипеда P, A — точка этой плоскости, AB — отрезок,



Черт. 58.

равный и параллельный боковому ребру параллелепипеда P. Пусть, далее, l — проекция прямой AB на плоскость p, а m — прямая, проведенная на плоскости p перпендикулярно к l и проходящая через точку A (черт. 59). Выберем на прямых l и m такие точки C и D, что прямоугольник со сторонами AC и AD равновелик основанию параллелепипеда P, и на этом прямоугольнике как на основании построим



Черт. 59.

параллелепипед Q с боковым ребром AB. Тогда параллелепипеды P и Q равносоставлены (в силу сделанного выше замечания). Приняв теперь параллелограмм со сторонами AB и AC за основание параллелепипеда Q, а AD — за его боковое ребро, мы увидим, что параллелепипед Q — прямой ($AD \perp AB$, $AD \perp AC$).

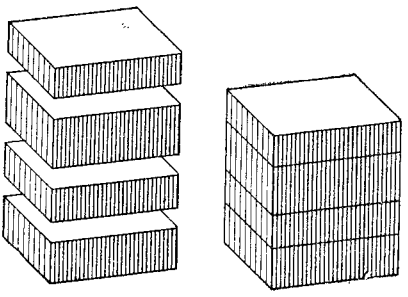
Пусть K — куб, равновеликий параллелепипеду Q, и a — длина его ребра. Заменив основание параллелепипеда Q равновеликим прямоугольником со стороной a, мы получим равносоставленный с Q прямоугольный параллелепипед, одно ребро которого равно a.

Приняв это ребро прямоугольного параллелепипеда за высоту и заменяя его основание равновеликим квадратом, мы получим куб K.

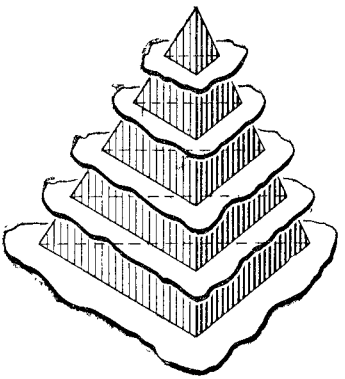
Итак, каждая призма равносоставлена с равновеликим ей кубом, а потому две равновеликие призмы равносоставлены между собой.

Прежде чем перейти к формулировке следующих лемм, условимся о некоторых обозначениях. Пусть A и B — два многогранника, не имеющих общих внутренних точек. Через $A+B$ будем обозначать часть пространства (многогранник), заполненную многогранниками A, B. Аналогично определяется и «сумма» нескольких многогранников. В частности, если многогранник A разбит на составляющие его многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_k$, то будем писать: $A = M_1 + M_2 + \ldots + M_k$. Далее, если даны n многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, каждый из которых равен многограннику M, то вместо суммы $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ будем также писать nM. Многогранник, подобный многограннику M с коэффициентом подобия λ, будем обозначать через $M^{(\lambda)}$. Наконец, знаком $\sim$ условимся обозначать равносоставленность многогранников: запись $A \sim B$ будет означать, что многогранники A и B равносоставлены.

Лемма 20. *Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — призмы, не имеющие общих внутренних точек, а P — призма, равновеликая их сумме. Тогда* $P_1 + P_2 + \ldots + P_k \sim P$.



Черт. 60.



Черт. 61.

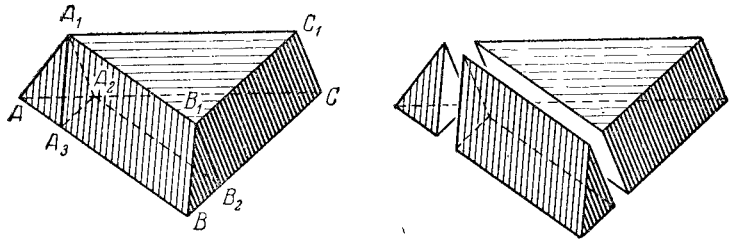
Для доказательства заменим призмы $P_1, P_2, \ldots, P_k$ равновеликими им прямоугольными параллелепипедами $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, имеющими равные основания, а затем сложим эти параллелепипеды «стопкой», прикладывая их друг к другу равными основаниями (черт. 60). В результате мы получим параллелепипед Π, равновеликий, очевидно, призме P, так что (см. лемму 19)

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k \sim \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_k \sim \Pi \sim P.$$

Лемма 21. *Пусть M — произвольный многогранник, а n — натуральное число. Тогда $M^{(n)} \sim P + nM$, где P — некоторая призма.*

Докажем эту лемму сначала в предположении, что M есть треугольная пирамида. В этом случае $M^{(n)}$ также есть треугольная пи-

рамида, причем высота ее в n раз больше высоты пирамиды M. Разделим высоту пирамиды $M^{(n)}$ на n равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию. Тогда пирамида $M^{(n)}$ разделится на n «слоев», верхний из которых представляет собой пирамиду, равную M (черт. 61). Рассмотрим какой-либо слой, отличный от верхнего. Он представляет собой усеченную пирамиду; нижнее и верхнее основания ее обозначим через ABC и $A_1B_1C_1$. Проведем через сторону A_1B_1 верхнего основания плоскость, параллельную ребру CC_1 (черт. 62). Она пересечет нижнее основание по отрезку A_2B_2, разделив усеченную пирамиду на две части: призму $A_2B_2CA_1B_1C_1$ и многогранник $AA_1A_2BB_1B_2$. Проведем теперь через



Черт. 62.

ребро A_1A_2 плоскость, параллельную грани BB_1B_2 этого последнего многогранника. Тогда он разобьется на две части: призму $A_1A_2A_3B_1B_2B$ и пирамиду $AA_1A_2A_3$, равную, как легко видеть, пирамиде M (ибо она подобна пирамиде M и имеет такую же высоту). Итак, каждый слой, кроме верхнего, можно разбить на пирамиду, равную M, и две призмы. Вся пирамида $M^{(n)}$ составлена из n пирамид, равных M, и ряда призм. Эти призмы можно в силу леммы 20 заменить одной призмой P, и мы получаем:

$$M^{(n)} \sim P + nM,$$

т. е. в случае, если M есть треугольная пирамида, лемма справедлива.

Пусть теперь M — произвольный многогранник. Если он невыпуклый, то, проведя все плоскости, в которых лежат его грани, мы разобьем его на конечное число выпуклых многогранников. Далее, каждый выпуклый многогранник можно разбить на пирамиды (многоугольные): для этого достаточно, взяв внутри многогранника точку O, рассмотреть все пирамиды, имеющие точку O своей общей вершиной, а грани многогранника — своими основаниями (черт. 63). Наконец, каждую многоугольную пирамиду можно разбить на несколько треугольных пирамид (черт. 64). Итак, всякий многогранник может быть разбит на конечное число треугольных пирамид. Пусть

$$M = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \tag{42}$$

— разбиение многогранника M на треугольные пирамиды. Увеличивая все эти фигуры подобно в n раз, получим:

$$M^{(n)} = T_1^{(n)} + T_2^{(n)} + \ldots + T_k^{(n)}.$$

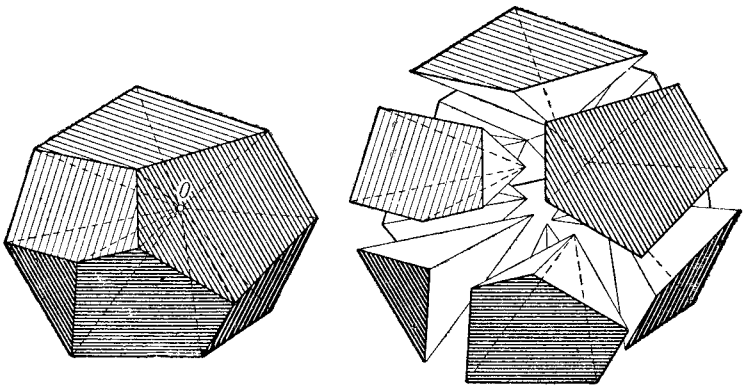
Согласно доказанному выше, имеем:

$$T_1^{(n)} \sim P_1 + nT_1,\ T_2^{(n)} \sim P_2 + nT_2,\ \ldots,\ T_k^{(n)} \sim P_k + nT_k,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — некоторые призмы. Таким образом,

$$M^{(n)} \sim (P_1 + P_2 + \ldots + P_k) + (nT_1 + nT_2 + \ldots + nT_k) \sim P + nM;$$

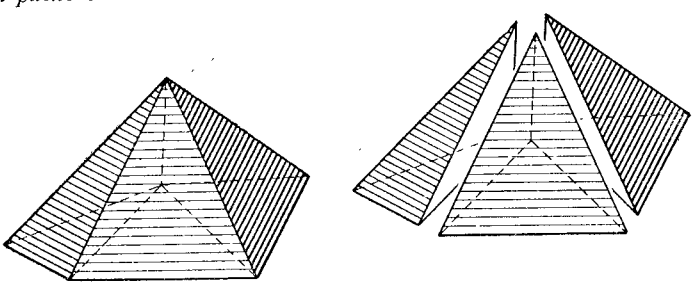
здесь сумма призм $P_1 + P_2 + \ldots + P_k$ заменена одной призмой (лемма 20), а из пирамид $T_1, T_2, \ldots, T_k$, каждая из которых берется в n



Черт. 63.

экземплярах, составляется в силу (42) n экземпляров многогранника M. Лемма доказана.

Лемма 22. *Если два многогранника равнодополняемы, то они равносоставлены.*



Черт. 64.

При доказательстве объем некоторого многогранника M будем обозначать через $V(M)$. Пусть A и B — равнодополняемые многогранники. Тогда существуют два равносоставленных между собой многогранника C и D, которые дополняют A и B до одной и той же фигуры:

$$A + C = B + D,\quad C \sim D. \tag{43}$$

Пусть C_1 — куб, внутри которого можно разместить многогранник C, а n — целое число, большее чем $\sqrt{1+\frac{V(C_1)}{V(A)}}$. Тогда $n^2 > 1+\frac{V(C_1)}{V(A)}$ или $n^2 V(A) > V(A)+V(C_1)$. Умножая обе части этого соотношения на n и, замечая, что $n^3 V(A)$ есть объем многогранника $A^{(n)}$, можем написать:

$$V(A^{(n)}) > nV(A)+nV(C_1). \tag{44}$$

Кроме того, согласно лемме 21 можем написать:

$$A^{(n)} \sim P+nA,\ B^{(n)} \sim Q+nB, \tag{45}$$

где P и Q — некоторые призмы; первое из этих соотношений дает $V(A^{(n)}) = V(P)+nV(A)$. Из этого равенства и из (44) следует $V(P) > nV(C_1)$, т. е. объем призмы P по крайней мере в n раз больше объема куба C_1. При этом согласно лемме 20 мы можем считать, что P есть прямоугольный параллелепипед с тем же основанием, что и куб C_1. Тогда высота параллелепипеда P по крайней мере в n раз больше высоты куба C_1, так что внутри P можно разместить n кубов, равных C_1, и тем более внутри P можно разместить n многогранников, равных C. Итак, поместим внутри P фигуру nC; оставшуюся часть параллелепипеда P (не занятую фигурой nC) обозначим через T:

$$P = T+nC. \tag{46}$$

Далее, призмы P и Q равновелики (ибо $V(A)=V(B)$, $V(A^{(n)}) = V(B^{(n)})$, а потому в силу (45) имеем $V(P)=V(Q)$) и, следовательно, равносоставлены (лемма 19):

$$P \sim Q. \tag{47}$$

Сравнивая соотношения (43), (45) — (47), находим:

$$\begin{aligned} A^{(n)} \sim P+nA &= T+nC+nA = T+n(A+C) \sim T+n(B+D) = \\ &= T+nB+nD \sim T+nB+nC = \\ &= (T+nC)+nB \sim P+nB \sim Q+nB \sim B^{(n)}. \end{aligned}$$

Итак, многогранники $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ равносоставлены, т. е. их можно разбить на соответственно равные части. Уменьшая подобно в n раз многогранники $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, а также части, на которые они разбиты, мы найдем, что многогранники A и B также равносоставлены. Лемма доказана.

Остается заметить, что теорема Сидлера, сформулированная выше, непосредственно вытекает из лемм 18 и 22.

ДОБАВЛЕНИЯ

1. Необходимое и достаточное условие равносоставленности многогранников. Приведем (без доказательства) условие равносоставленности, данное в одной из работ Хадвигера. Предположим, что каждому многограннику A поставлено в соответствие некоторое число $\chi(A)$, причем выполнены следующие условия:

1) равным многогранникам A и B соответствуют равные числа $\chi(A)=\chi(B)$ (условие инвариантности);

2) если многогранник A разбит на несколько многогранников M_1, M_2, ..., M_k, то имеет место равенство

$$\chi(A)=\chi(M_1)+\chi(M_2)+\ldots+\chi(M_k)$$

условие аддитивности);

3) если $A^{(\lambda)}$ — многогранник, подобный многограннику A с коэффициентом подобия λ, то $\chi(A^{(\lambda)})=\lambda\cdot\chi(A)$ (условие линейности).

При этих условиях говорят, что задан *линейный аддитивный инвариант* χ. Имеет место следующая

Теорема. *Для равносоставленности многогранников A и B необходимо и достаточно, чтобы их объемы были одинаковы и, кроме того, чтобы для любого линейного аддитивного инварианта χ было выполнено равенство $\chi(A)=\chi(B)$.*

Иначе говоря, если равновеликие многогранники A и B не равносоставлены, то существует такой линейный аддитивный инвариант χ, для которого $\chi(A)\neq\chi(B)$. Заметим, что в силу доказанной выше теоремы Сидлера это условие является также необходимым и достаточным для *равнодополняемости* многогранников A и B.

Интересно сравнить это условие с формулировкой доказанной выше теоремы Хадвигера (стр. 41). Там был также построен некоторый инвариант $f(A)$. Равным многогранникам A и B соответствовали равные значения инварианта: $f(A)=f(B)$. Этот инвариант был аддитивным (лемма 17). Он был также линейным (ибо все ребра многогранника $A^{(\lambda)}$ в λ раз больше ребер многогранника A, а их двугранные углы одинаковы, так что из определения инварианта f на стр. 41 вытекает равенство $f(A^{(\lambda)})=\lambda\cdot f(A)$). Однако инвариант f все же отличается от тех инвариантов, о которых говорится в сформулированной выше теореме: инвариант f не определен для всех многогранников. Он был определен только для двух многогранников, о которых шла речь в теореме Хадвигера, а когда нам встретились новые многогранники (в лемме 17), мы дополнительно определяли значение инварианта f для этих многогранников.

Следует заметить, что существование линейных аддитивных инвариантов, определенных сразу для всех многогранников, доказывается существенно неэлементарно. Для построения таких инвариантов [1]) (так же как и для доказательства сформулированной в этом разделе теоремы) применяется так называемая *трансфинитная индукция*, представление о которой далеко выходит за рамки этой небольшой книжки.

2. G-равносоставленность многогранников. Как и в случае многоугольников, можно говорить о G-равносоставленных многогранниках, где G — некоторая группа движений (разумеется, здесь уже имеются в виду движения пространственных фигур, в частности, многогранников). Обозначим через T группу, состоящую из всех параллельных переносов (в пространстве). Тогда можно говорить о том, будут или не будут два заданных многогранника T-равносоставленными. Отметим следующую интересную теорему, также принадлежащую Хадвигеру.

Теорема. *Для того чтобы выпуклый многогранник был T-равносоставлен с кубом, необходимо и достаточно, чтобы каждая его грань была центрально симметричным многоугольником* [2]).

Отсюда следует, что два равновеликих многогранника, каждый из которых имеет центрально симметричные грани, T-равносоставлены между собой. В частности, если имеются два равных многогранника с центрально симметричными гранями, то как бы они ни были повернуты друг относительно друга, они всегда будут T-равносоставленными.

Наряду с G-равносоставленными можно также рассматривать *G-равнодополняемые* многогранники (G — группа движений). Если группа G содержит все параллельные переносы (она может, кроме переносов, содержать и другие движения), то *два многогранника тогда и только тогда G-равнодополняемы, когда они G-равносоставлены.* Доказательство этой теоремы (справедливой также в n-мерном пространстве) получается лишь незначительным усложнением приведенного выше доказательства теоремы Сидлера.

---

[1]) Существует лишь один инвариант, построение которого элементарно: это — инвариант, равный нулю для каждого многогранника A. Однако рассмотрение этого инварианта бессодержательно.

[2]) Из результатов советского геометра А. Д. Александрова вытекает, что многогранник, обладающий этим свойством, является центрально симметричным.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Глава I. **Равносоставленность многоугольников** 5
§ 1. Теорема Бояй — Гервина 5
§ 2. Теорема Хадвигера — Глюра 15
§ 3. Равносоставленность и понятие аддитивного инварианта 24
§ 4. Равносоставленность и понятие группы 30
Глава II. **Равносоставленность многогранников** 38
§ 5. Теоремы Дена и Хадвигера 38
§ 6. О методах вычисления объемов 52
Добавления 62